SAYISAL ANALİZ

Ders Notları

MART 27, 2016

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ, MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

Zekeriya Girgin

Önsöz

Mühendislikte analitik olarak çözemediğimiz birçok problem, sayısal olarak çözülebilmektedir. Buna lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümü veya karışık integraller misal verilebilir.

Bu ders notları lisans eğitimi alan Makine Mühendisliği öğrencileri için hazırlandı. Konular ve verilen misaller kolaydan zora doğru sıralanmaya çalışıldı.

Çözümler sayısal olarak verildi.

Ders notlarından Türkçe bilen tüm öğrencilerin parasız olarak faydalanabilmesi için PDF formatı tercih edildi. Böylece öğrenciler derste aynı şeyleri yazmak yerine, zamanlarını anlamaya ayırması ve daha başarılı olması arzu edildi.

İlk defa yazılmaya başlandığı için hataların çıkması doğaldır ve bu hatalar gözden geçirildikçe düzeltilecektir.

Notların genişletilmesine mümkün olduğunca devam edilecektir. Yani zaman geçtikçe daha düzgün ve hatasız hale geleceği kanaatindeyim. Ayrıca yeni bölümler de eklenebilecektir. Ders notlarında görülen hataların tarafıma bildirilmesi beni daha da memnun edecektir. Böylece daha düzgün hale gelecektir. İnşâallah ilaveler yapıldıkça yeni hâliyle tekrar web sayfasından yayınlanacaktır.

Bir söz var, "Amelinizde rızâ-yı İlahî olmalı. Eğer o râzı olsa, bütün dünya küsse ehemmiyeti yok. Eğer o kabul etse, bütün halk reddetse tesiri yok. O râzı olduktan ve kabul ettikten sonra, isterse ve hikmeti iktizâ ederse, sizler istemek talebinde olmadığınız halde, halklara da kabul ettirir, onları da râzı eder."

"İyilik yap denize at, Balık bilmese de Hâlık bilir."

Doç.Dr. Zekeriya Girgin

Mart 2016

Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Kınıklı Kampüsü 20070
Denizli, Türkiye

Web page:

http://zgirgin.pau.edu.tr/

Zekeriya Girgin

İçindekiler

Zekeriya Girgin

Zekeriya Girgin

Zekeriya Girgin

Zekeriya Girgin

1. Sayısal Analize Giriş (Introduction to Numerical Analysis):

Sayısal Analiz; diferansiyel denklem, integral veya denklemlerin bilgisayar yardımı ile analitik olarak değil, sayısal olarak çözümlenme tekniğidir. Mühendislikte bir çok lineer olmayan diferansiyel denklem analitik olarak çözülemediği halde, sayısal olarak çözümlenebilmektedir.

Gerçek hayatta bilinen birçok fiziksel olayın gerçek hâli lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmektedir. Buna örnek olarak Navier-Stokes Denklemleri, Burger's Denklemi vesaire verilebilir. Veya salınım hareketi yapan bir salıncağın hareket denklemi, lineer olmayan diferansiyel denklem ile ifade edilebilmekte ve bu denklemin analitik çözümü hâlâ bilinmemektedir. Bir yağmur damlasının gökyüzünden yere inerken rüzgar direnci hesaba alındığında, sabit hızla yere indiği bilinmektedir. Eğer normal Dinamik dersindeki gibi dikey atış problemi olsaydı, yere ininceye kadar o kadar hızlanırdı ki, düştüğü yerde hasara neden olabilirdi. Bu çözümler sayısal olarak yapılabilmektedir. Birçok karmaşık fonksiyounun integrali, analitik olarak yapılamamasına rağmen, sayısal olarak yapılabilmektedir.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, sayısal analiz metotları da gelişmiştir. Bunun en bilinen örnekleri, Sonlu Elemanlar Metodu, Sonlu Farklar Metodu ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuvadratüre Metotlarıdır. Ayrıca birçok lineer veya lineer olmayan denklem sistemleri sayısal analiz metotları ile çözülebilmektedir. Bu işlemlerin yapılabilmesi için de bir çok program geliştirilmiştir (Fortran, Basic, Pascal, C++, C#, Matlab, Dymola gibi).

Bunun yanı sıra Sembolik hesaplama yapan programlar da geliştirilmiştir (Maple, Mathematica, Mathcad, Mupad, Scilab, Derive gibi). Bu programlar sayesinde diferansiyel denklemler bile sembolik olarak çözülebilmektedir.

Hatta son zamanlara Excel programına ilave edilen Matematiksel Fonksiyonlardan (Matris Tersi, Matris Çarpımı gibi) sonra, Sayısal Analiz ile ilgili bütün sonuçlar Microsoft Excel kullanılarak da elde edilebilmektedir.

2. Hata Tanımlamaları (Error Definitions):

Bilgisayar ile hesaplama yaparken, bilgisayarda 1/3 gibi sayıları ondalık ile belirli kesirli sayılarla ifade ederken sayılar kısaltmalardan dolayı hatalar meydana gelir ve bu nedenle,

$$\boxed{\text{Gerçek Değer} = \text{Hesaplanan Değer} \mp \text{Hata}}$$

Zekeriya Girgin

şeklinde yazılabilir. Bu hataların türlerini belirleyebilmek için aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır.

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error):

Fonksiyonların Taylor serisine açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n \\ f(x_{i+1}) &= f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2+\frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3+\ldots+R_n \end{aligned} \tag{1}$$

Buradaki artan değer,

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^{n+1},\quad (x_{i+1}\le\xi\le x_i)$$

şeklinde tanımlıdır. Taylor serisinde $(x_{i+1}=x, x_i=0)$ alındığında, Maclaurin Serisi elde edilir.

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x)^4+\ldots \tag{2}$$

Bazı fonksiyonların Maclaurin serisine açılımı aşağıdaki gibidir.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

$$\sin(x)=\begin{cases} \cancel{\sin(0)}+\cos(0)(x)-\frac{\cancel{\sin(0)}}{2!}(x)^2-\frac{\cos(0)}{3!}(x)^3+\frac{\cancel{\sin(0)}}{4!}(x)^4+ \\ +\frac{\cos(0)}{5!}(x)^5-\frac{\cancel{\sin(0)}}{6!}(x)^6-\frac{\cos(0)}{7!}(x)^7+\frac{\cancel{\sin(0)}}{8!}(x)^8+\frac{\cos(0)}{9!}(x)^9+\ldots \end{cases}$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)}\cdot x^{2\cdot n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot n+3)}\cdot x^{2\cdot n+3}\cdot\cos(\xi\cdot x)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)}\cdot x^{2\cdot k+1}+R_n(x)$$

Denklem (1) den görüldüğü gibi seride alınan terim sayısı arttıkça hata payı azalacaktır. Bu hata payı kesme hatası olarak tanımlanır. Denklem olarak kesme hatası,

$$\boxed{\text{Kesme Hatası} = \text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}$$

şeklinde tanımlanabilir. Veya,

$$\boxed{E_t = x_{exact} - x_{app}}$$

yazılabilir. Bununla ilgili misal aşağıda verilmiştir.

2.1.1 Misal

$e^{1.5}$ sayısını, Maclaurin serisine açıp maksimum, a) 3. mertebedene kadar olan terimlerileri alarak, b) 5. mertebedene kadar olan terimlerileri alarak, kesme hatasını hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: a) ilk önce seri yazılmalıdır.

$$e^x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + \cancel{\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \rightarrow e^{1.5} = 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} \rightarrow e^{1.5} = 4.1875$$

$$\boxed{E_t = x_{exact} - x_{app}} \rightarrow E_t = x_{exact} - x_{app} \rightarrow E_t = e^{1.5} - 4.1875 \rightarrow E_t = 4.4816890703380650 - 4.1875$$

$$\boxed{E_t = 0.2941890703380650}$$

b) ilk önce seri yazılmalıdır.

$$e^x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \cancel{\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \rightarrow e^{1.5} = 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} + \frac{1.5^4}{4!} + \frac{1.5^5}{5!} \rightarrow e^{1.5} = 4.46171875$$

$$\boxed{E_t = x_{exact} - x_{app}} \rightarrow E_t = x_{exact} - x_{app} \rightarrow E_t = e^{1.5} - 4.1875 \rightarrow E_t = 4.4816890703380650 - 4.46171875$$

$$\boxed{E_t = 0.0199703203380650}$$

Görüldüğü gibi Maclaurin serisinde alınan terim sayısı artırıldıkça, kesme hatası da o derece azalmaktadır.

2.2 Bağıl Hata (Relative Error):

Gerçek değer biliniyor ve hesaplanan değer de biliniyor ise Mutlak hata,

$$\boxed{\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}{\text{Gerçek Değer}}}$$

Veya,

$$\boxed{E_{rel} = \frac{x_{exact} - x_{app}}{x_{exact}} \rightarrow E_{rel} = \frac{x - x^*}{x}} \qquad (3)$$

ile tanımlıdır. Bunun ile ilgili basit bir misal aşağıda verilmiştir.

2.2.1 Misal

Pi sayısının yaklaşık hali,

a) bayağı kesir olarak $\left(\frac{22}{7}\right)$ şeklinde verildiğinde,

b) 3.1416 olarak verildiğinde bağıl hatayı hesaplayınız.

Çözüm: a) $E_{rel} = \frac{x - x^*}{x} \rightarrow E_{rel} = \frac{\pi - \left(\frac{22}{7}\right)}{\pi} \rightarrow E_{rel} = \frac{3.1415926535897930 - \left(\frac{22}{7}\right)}{3.1415926535897930}$

$E_{rel} = \text{-}0.0004024994347708$ olarak hesaplanır.

Zekeriya Girgin

b) $E_{rel} = \frac{x_{exact} - x_{app}}{x_{exact}} \rightarrow E_{rel} = \frac{\pi - 3.1416}{\pi} \rightarrow E_{rel} = -0.0000023384349968$

2.2.2 Misal

Tabii logaritma e sayısı ve yaklaşık hesaplanmış olarak verilen 2.718 sayısı için bağıl hatayı hesaplayınız.

Çözüm: $\boxed{E_{rel} = \frac{x_{exact} - x_{app}}{x_{exact}}} \rightarrow E_{rel} = \frac{e^1 - 2.718}{e^1} \rightarrow E_{rel} = \frac{2.7182818284590450 - 2.718}{2.7182818284590450}$

$E_{rel} = 0.0001036788960197$

2.3 Mutlak Hata (Absolute Error):

Gerçek değer biliniyor ve hesaplanan değer de biliniyor ise Mutlak hata,

$$\boxed{\text{Mutlak hata} = \left\| \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \right\|}$$

denklemiyle hesaplanır. Bu denklem aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$$\boxed{E_{abs} = \left\| \frac{x_{exact} - x_{app}}{x_{exact}} \right\|} \rightarrow \boxed{E_{abs} = \left\| \frac{x - x^*}{x} \right\|}$$

ile tanımlıdır.

2.3.1 Misal

Yukarıda verilen Misal 2.2.1 de bağıl hataları hesaplayınız.

Çözüm: a) $E_{rel} = \left| \frac{x - x^*}{x} \right| \rightarrow E_{rel} = \left| \frac{\pi - \left(\frac{22}{7}\right)}{\pi} \right| \rightarrow E_{rel} = \left| \frac{3.1415926535897930 - \left(\frac{22}{7}\right)}{3.1415926535897930} \right|$

$E_{rel} = +0.0004024994347708$ olarak hesaplanır.

b) $E_{rel} = \left| \frac{x_{exact} - x_{app}}{x_{exact}} \right| \rightarrow E_{rel} = \left| \frac{\pi - 3.1416}{\pi} \right| \rightarrow E_{rel} = +0.0000023384349968$

2.4 Yuvarlatma Hatası (Rounding Error):

Hesap makinesinde alınan terimlerde, kesirli kısmın hâne sayısı ile ilgilidir. Kendisinden sonraki sayı değeri 5 değerine eşit ve büyükse pozitif yönde 1 sayı artırılarak yazılır. Eğer (5) ten küçük ise kalan kesirli kısım atılır.

Bunun ile ilgili misaller aşağıda verilmiştir. Aşağıda verilen sayıları kesirli kısmı 3 hane olacak şekilde yuvarlatma hatası yaparak yazınız.

$3.6666666 = 3.667$, $2.15550 = 2.156$, $85.12449999 = 85.124$ $0.71849999 = 0.718$

Zekeriya Girgin

3. (Lineer olmayan bir değişkenli denklemlerin çözümleri (Solutions of Nonlinear Equations in One Variable)

Bazı lineer olmayan denklemleri analitik olarak çözülemediğinde sayısal çözümleme yollarına gidilir. Denklem, bir tarafı sıfıra eşitlenecek şekilde aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Önceki bölümlerde izah edildiği gibi lineer olmayan denklemlerde bir ve/veya birden fazla lineer olmayan terim olduğundan çözümü yapılamaz. Buna misal olarak aşağıdaki denklemler verilebilir.

$3 - 3\cdot x^3 + x^2 = 0$ → lineer değil çünkü x^3 ve x^2.terimlerinden dolayı

$x + \sin(y) = 0$ → lineer değil çünkü $\sin(y)$ terimi mevcut.

$x \cdot y = 1$ → indisler toplamı birden büyük olduğundan lineer değildir.

$\frac{1}{1+x} - 3\cdot x = 0$ → Paydada x değişkeni olduğundan lineer değildir.

Temel problem lineer olmayan bir denklemde köklerin bulunması olduğundan verilen bir fonksiyon f (x) = 0 şeklinde tanımlandığında kökünün varlığı önce bilinmelidir.

Grafik olarak bunu görmek daha kolaydır. Verilen fonksiyon [a,b] aralığında sürekli ve fonksiyon bu aralıkta işaret değiştiriyorsa mutlaka bir sıfır noktasından geçiyor demektir.

Çözümün mevcut olması (Existence of Solutions):

Fonksiyonun değerini sıfır yapan kökü bulmak için birkaç teorem verilmiştir.

Ara Değer Teoremi (Intermediate-Value Theorem):

$f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ arlığında sürekli ve herhangi bir C katsayısı $f(a) \leq C \leq f(b)$ özelliğine sahip ise öyle bir p sayısı vardır ki bu sayı $p \in (a,b)$ tanımlıdır öyle ki $f(c) = C$ özelliğine sahiptir

Ortalama Değer Teoremi (Mean-Value Theorem):

$f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)\cdot f(b) < 0$ ise, bu aralıkta en az bir tane kök vardır.

Fonksiyonun köklerinin bulunması temel olarak iki farklı yolla yapılır. Bunlar;

1. Kapalı aralık (Braket)metotlar (Bracketing Methods): yani kapalı bir $[a,b]$ aralığında fonksiyon işaret değiştiriyor ise, problem çözümüne iki tane başlangıç değeri girilerek çözüme gidilir. Başlangıç değerleri doğru girildiğinde çözüme gidilir. fakat köke yavaş yaklaşır.

2. Açık Metotlar (Open methods): Bu metotlarda başlangıç değeri bir tane girilerek çözüme gidilir. Bu metotlarda köke yaklaşma braket metotlara oranla daha hızlıdır.

İlk olarak burada kullanılan iki tane Braket (Kapalı aralık) metot verilecektir.

Zekeriya Girgin

3.1 İkiye Bölme Metodu (Bisection Method)

Bu metot $x \in [a,b]$ kapalı aralığında $(x_1 = a,\ x_2 = b)$ fonksiyon sürekli ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ özelliğine sahip ise, fonksiyon işaret değiştirdiğinde dolayı mutlaka bir sıfır değerinden geçecektir.
Aşağıda verilen şekilden de görüldüğü gibi $f(x_1) > 0$ ve $f(x_2) < 0$ olduğundan, 1. iterasyon sonucunda bulunacak olan x_3 noktası bu iki değerin aritmetik ortalaması alınır. Yani;

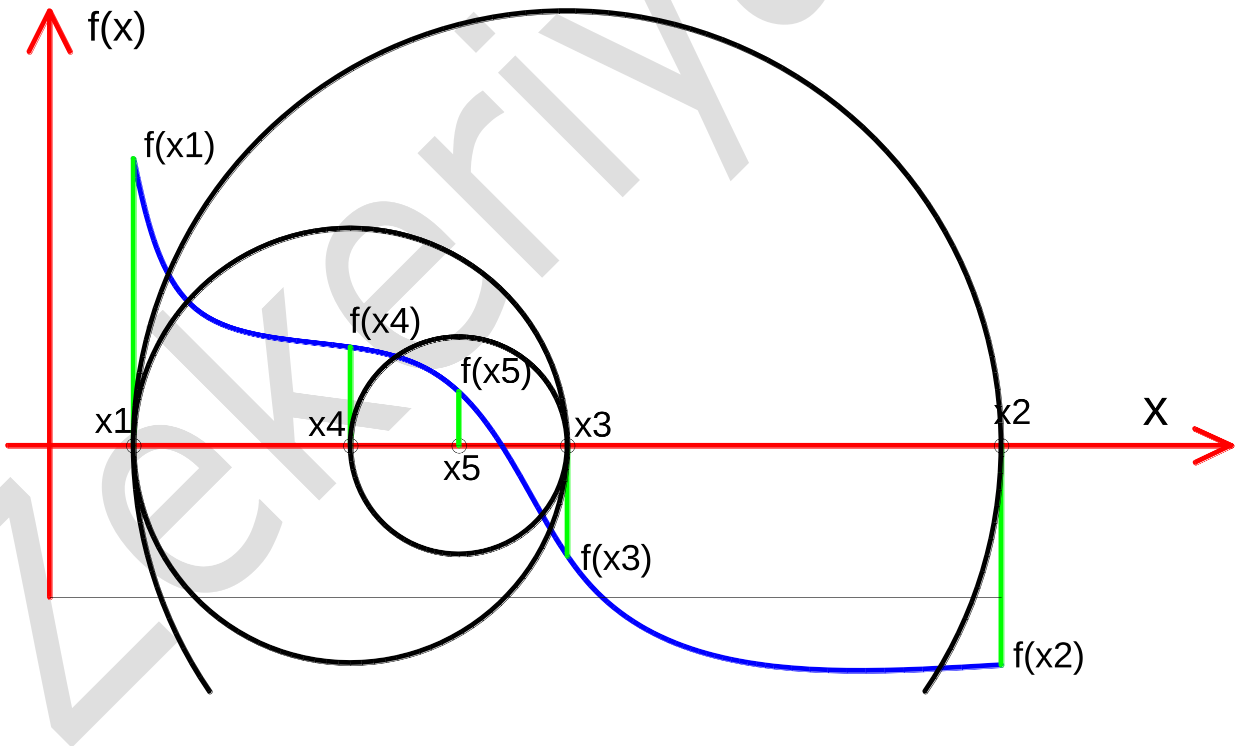
$$(x_1 = x_L,\ x_2 = x_U,\ x_3 = x_r),\ x_r = \frac{x_L + x_U}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{4}$$

olacak şekilde $(x_2 - x_1)$ çaplı çizilen dairenin merkezini göstermektedir.
2. iterasyon için; $f(x_3) < 0$ olduğundan, $f(a) \cdot f(b) < 0$ şartının sağlanması için, $f(x_1) > 0$ olan önceki değerin kullanılması mecburidir. Böylece $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$;

$$(x_1 = x_L,\ x_3 = x_U,\ x_4 = x_r),\ x_r = \frac{x_L + x_U}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{x_3 + x_1}{2}$$

olacak şekilde $(x_3 - x_1)$ çaplı çizilen dairenin merkezini göstermektedir.
3. iterasyon için; $f(x_4) > 0$ olduğundan, $f(a) \cdot f(b) < 0$ şartının sağlanması için, son iki değerden $f(x_3) < 0$ olan önceki değerin kullanılması mecburidir. Böylece $f(x_3) \cdot f(x_4) < 0$;

$$(x_3 = x_L,\ x_4 = x_U,\ x_5 = x_r),\ x_r = \frac{x_L + x_U}{2} \Rightarrow x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2}$$



Şekil 3-1: İkiye bölme metodunun grafik gösterimi

olacak şekilde $(x_3 - x_4)$ çaplı çizilen dairenin merkezini göstermektedir.
Böylece iterasyon (yineleme) devam ettikçe fonksiyon kök değerine yaklaşmaktadır.
Bu metodun algoritması aşağıdadır.

Zekeriya Girgin

İkiye bölme metodunun program algoritması:

```
Given f (x) = 0, ε and the initial end points [a0,b0], where f(a0)*f(b0)<0;
Given max=maximum number of iterations;
For i=0 to max
     Compute ci = (ai+bi)/2;
     If f(ai)*f(ci)<0
          Update bi+1 = ci and ai+1=ai;
     If f(ai)*f(ci) > 0
          Update ai+1 = ci and bi+1 = bi;
     If |ci−ci-1| < ε
          Solution= ci;
     Stop the iterations;
Endfor
```

3.1.1 Misal

$x^3 - 2\cdot x^2 - 5 = 0$ şeklinde verilen denkleminin kökünü $x \in [2,4]$ aralığında ikiye bölme metodunu kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: ilk önce fonksiyonun bu aralıkla işaret değiştirip değiştirmediği test edilmelidir.

$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 - 5 \rightarrow f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 - 5 = -5 \rightarrow f(2) = -5 < 0$

$f(4) = 4^3 - 2\cdot 4^2 - 5 \rightarrow f(4) = 27 > 0$ Buradan $f(2)\cdot f(4) < 0$ olduğu görülür. Yeni kullanılacak x değeri aritmetik ortalama ile hesaplanır.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \rightarrow f(3) = 3^3 - 2\cdot 3^2 - 5 = 4 > 0 \rightarrow f(3) > 0$$

Önceki iki farklı x değerinden fonksiyonun değeri hangisinde sıfırdan küçük ise o değer seçilerek, ikinci iterasyona bu değerle başlanır.

İterasyon sayısı	x_L	x_U	x_C	$f(x_L)$	$f(x_U)$	$f(x_C)$
1	2	4	3	-5	27	4
2	2	3	2.5	-5	4	-1.875
3	2.5	3	2.75	-1.875	4	0.671875
4	2.5	2.75	2.625	-1.875	0.671875	-0.69335938
5	2.625	2.75	2.6875	-0.693359	0.671875	-0.034423
…	…	…	…	…	…	…
53	2.690647					-1.77636e-15

Tabloda verildiği gibi, değişmeyen x değerlerinin 53. iterasyondan sonra olduğu görülmüştür. $\boxed{x = 2.690647448028614}$ değeri kök değeridir.

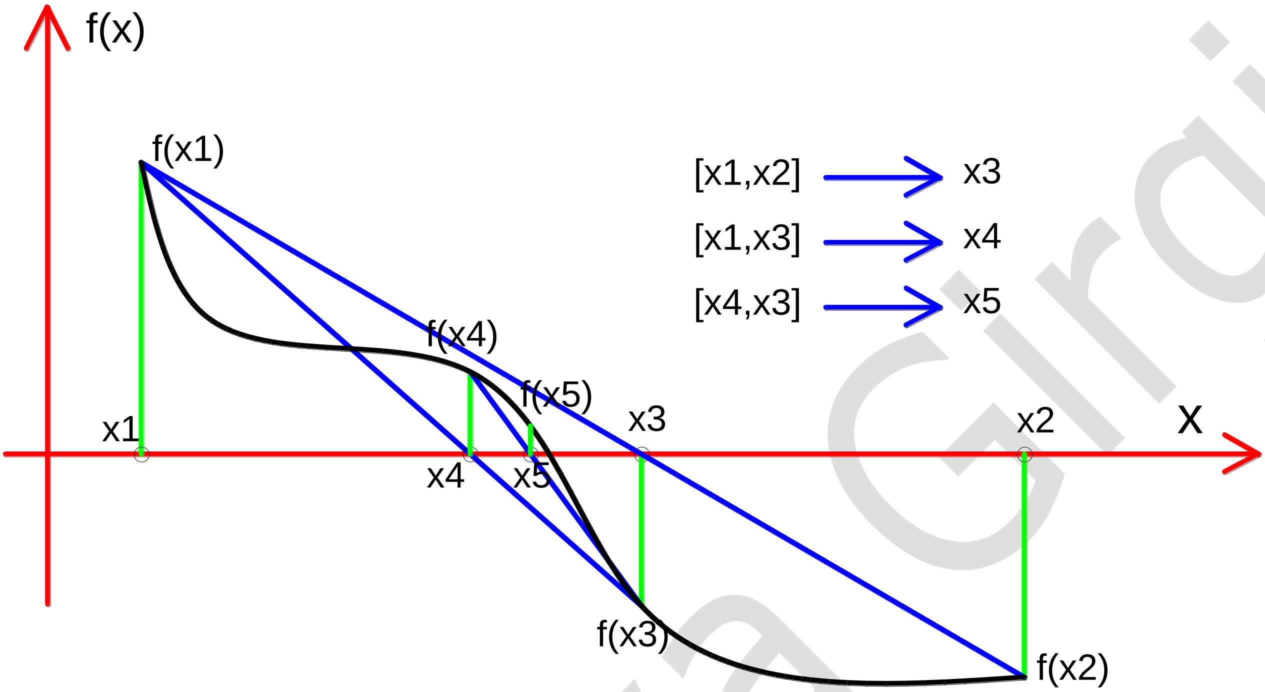
3.2 Doğrusal İnterpolasyon Metodu (Linear Interpolation Method, False Position Method, Regula Falsi method)

Bu metot $x \in [a,b]$ kapalı aralığında $(x_1 = a,\ x_2 = b)$ fonksiyon sürekli ve $f(a)\cdot f(b) < 0$ özelliğine sahip ise, fonksiyon işaret değiştirdiğinde dolayı mutlaka bir sıfır değerinden geçecektir. Fakat hesaplanan değer kabaca ikiye bölme olduğuğundan, tahmin edilen değerde hata payı yüksek olmaktadır. Bunun yerine, bu iki nokta arasında lineer interpolasyon yapılarak daha yakın bir değerin hesaplanması esas alınmıştır. Diğer işlemlerin tamamı ikiye bölme metodu gibidir.

Zekeriya Girgin

Aşağıda Şekil 3-2 de görüldüğü gibi $f(x_1)>0$ ve $f(x_2)<0$ olduğundan, 1. iterasyon sonucunda bulunacak olan (x_3) noktasını bulmak için Şekil 3-2 deki üçgenlerden faydalanılır

$$\frac{f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_2)}{x_3-x_2} \quad \rightarrow \quad \frac{f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_2)}{x_3-x_2} \quad \rightarrow \quad f(x_1)\cdot(x_3-x_2)=f(x_2)\cdot(x_3-x_1)$$



Şekil 3-2: Doğrusal interpolasyon metodunun grafik gösterimi

$$x_3\cdot f(x_1)-x_2\cdot f(x_1)=x_3\cdot f(x_2)-x_1\cdot f(x_2) \rightarrow x_3\cdot f(x_1)-x_3\cdot f(x_2)=x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)$$

$$\boxed{x_3=\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}} \rightarrow \qquad (5)$$

denklemi veya aşağıda gelecek denklem, doğrusal interpolasyon metodu için kullanılabilir.

$$x_3=\frac{x_2\cdot f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}-\frac{x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

Yukarıdaki denkleme x_2 terimi eklenip çıkarılarak tekrar yazıldığında;

$$x_3=x_2+\frac{x_2\cdot f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}-x_2-\frac{x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

x_2 terimi, $(f(x_1)-f(x_2))$ terimi ile çarpılıp yine bölünerek yazıldığında;

$$x_3=x_2+\frac{x_2\cdot f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}-x_2\cdot\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}-\frac{x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

elde edilir. Bu terimler ortak paydada yazıldığında;

$$x_3=x_2+\frac{\cancel{x_2\cdot f(x_1)}-\cancel{x_2\cdot f(x_1)}+x_2\cdot f(x_2)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)} \rightarrow x_3=x_2-\frac{x_1\cdot f(x_2)-x_2\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

Zekeriya Girgin

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}} \qquad (6)$$

Bu veya yukarıda verilen denklem, metodun temel denklemidir.
Program algoritması (temel kuralı, mantığı,işlem yapısı) aşağıdadır.
Algorithm for False Position Method:

```
Given f (x) = 0, ε and the initial end points [a0, b0] where f (a0) f (b0)
< 0; Given max=maximum number of iterations;
For i=0 to max
Compute c(i)=((a(i)*f(b(i)-b(i)*f(a(i)))/( f(b(i)-f(a(i)));
     If f(aᵢ)*f(cᵢ) < 0
          Update bᵢ₊₁ = cᵢ and aᵢ₊₁=aᵢ;
     Endif
     If f(aᵢ)*f(cᵢ) > 0
          Update aᵢ₊₁ = cᵢ and bᵢ₊₁ = bᵢ;
     Endif
     If |cᵢ−cᵢ₋₁| < ε
          Solution= cᵢ;
          Stop the iterations;
     Endif
Endfor
```

İkincisi, açık metotlar olarak tanımlanan üç tane metot verilecek ve incelenecektir. Bu metotların temel özelliği, başlangıç değeri sadece bir tanedir. Bilinmeyene başlangıç değeri verdikten sonra tekrarlamaya devam ettikçe, fonksiyonun kök değerine yaklaşılır.

3.2.1 Misal

$x^3 - 2\cdot x^2 - 5 = 0$ şeklinde verilen denkleminin kökünü $x \in [2,4]$ aralığında doğrusal interpolasyon metodunu kullanarak hesaplayınız.
Çözüm: ilk önce fonksiyonun bu aralıkla işaret değiştirip değiştirmediği test edilmelidir.

$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 - 5 \rightarrow f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 - 5 = -5 \rightarrow f(2) = -5 < 0$

$f(4) = 4^3 - 2\cdot 4^2 - 5 \rightarrow f(4) = 27 > 0$ Buradan $f(2)\cdot f(4) < 0$ olduğu görülür. Yeni kullanılacak x değeri aritmetik ortalama ile hesaplanır.

$$x_3 = \frac{x_2\cdot f(x_1) - x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{4\cdot(-5) - 2\cdot(27)}{(-5) - (27)} = 2.3125$$

$f(2.3125) = 2.3125^3 - 2\cdot 2.3125^2 - 5 = \text{-}3.32886 < 0 \rightarrow f(2.3125) < 0$

Önceki iki farklı x değerinden fonksiyonun değeri hangisinde sıfırdan küçük ise o değer seçilerek, ikinci iterasyona bu değerle başlanır.

İterasyon sayısı	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$
1	2	4	2.3125	-5	27	-3.32886
2	2.3125	4	2.49772	3.3288627	27	-1.89494
3	2.49772	4	2.59624	-1.89494	27	-0.981086
4	2.59624	4	2.64546	-0.981086	0.671875	-0.482802
…	…	…	…	…	…	…
15	2.69062	4	2.69064	-0.000258	0.671875	-0.0001209
…	…	…	…	…	…	…
18	2.69065	4	2.69065			

Zekeriya Girgin

Tabloda verildiği gibi, değişmeyen x değerlerinin 40. tekrarlamadan sonra olduğu görülmüştür. $\boxed{x = 2.690647448029}$ değeri kök değeridir.

3.2.2 Misal

Bir paraşütçünün yukarıdan aşağı doğru düşerken karşılaştığı sürtünme katsayısı;

$v = \frac{m \cdot g}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m} \cdot t}\right)$ denklemi ile verilmiştir. Burada t:zaman, m:kütle, g:yerçekimi ivmesi, v:yukarıdan aşağıya düşme hızı ve c:sürtünme katsayısıdır. sayısal olarak t=10s, m=68.1kg, g=9.81m/s^2 ve v=40m/s olduğuna göre, c sürtünme katsayısını c1=12 ve c2=16 başlangıç değerlerini kullanarak hesaplayınız

Çözüm: ilk önce denklem sıfıra eşitlenerek yazılmalıdır ve temel değişken c katsayısıdır.

$$f(c) = \frac{m \cdot g}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m} \cdot t}\right) - v \rightarrow f(c) = \frac{(68.1) \cdot (9.81)}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{68.1} \cdot 10}\right) - 40$$

c_1=12 için $f(c_1) = \frac{668.061}{12}\left(1 - e^{-\frac{100}{681} \cdot 12}\right) - 40 = 6.1139$ elde edilir ve c_2=16 için $f(c_2) = \frac{668.061}{16}\left(1 - e^{-\frac{100}{681} \cdot 16}\right) - 40 = -2.2302$ bulunur. → $f(c_1) \cdot f(c_2) < 0$ şartı sağlandığından c_3 değeri, bu iki değer arasında interpolasyon denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$c_3 = c_2 - \frac{f(c_2) \cdot (c_1 - c_2)}{f(c_1) - f(c_2)} \rightarrow c_3 = c_2 - \frac{f(c_2) \cdot (c_1 - c_2)}{f(c_1) - f(c_2)} \rightarrow c_3 = 16 - \frac{(-2.2302) \cdot (12 - 16)}{(6.1139) - (-2.2302)} = 14.9309$$

1. tekrarlama sonunda; f1=6.11394, f2=-2.23026, cr=14.9309

f1*fr=-1.53758 < 0

Yeni kök değeri c1 ve cr arasındadır

2. tekrarlama sonunda; f1=6.11394, f2=-0.251487, cr=14.8151

f1*fr=-0.165964 < 0

Yeni kök değeri c1 ve cr arasındadır

3. tekrarlama sonunda; f1=6.11394, f2=-0.0271452, cr=14.8026

Tekrarlama sayısı artırıldığında kök değeri cr=14.8011 olarak hesaplanır.

Aşağıda verilen çözüm tarzları açık alan usulleridir. yani Başalangıçta iki nokta alınarak çözüme başlanmaz. Bir değerden başlanır ve tekrarlama sonucunda yavaş yavaş kök değerine doğru gidilir.

3.3 Tekrarlama Metodu (The Fixed-Point Iteration method)

$f(x) = 0$ denklemi yazıldığında, x değerini hesaplamak gerekiyorsa, denklemde x değeri bir tarafta kalacak şekilde tekrar yazılır.

$$x = g(x) \tag{7}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda;

$$f(x) = x - g(x) = 0 \tag{8}$$

Zekeriya Girgin

Köklerin bulunması için;

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{9}$$

Fakat burada çözümün yakınsaması için bir şart vardır. Bu şart aşağıda verilmiştir. İterasyonun yapılacağı aralık $s = [a,b]$ ile tanımlı ve bu aralıkta x in her değeri için fonksiyon türevi alınabilir ve $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ ise bu türevin değeri;

$$\boxed{\left|\frac{d}{dx} g(x)\right|_{x=a} < L}, \quad \boxed{\left|\frac{d}{dx} g(x)\right|_{x=b} < L, \quad (L < 1)} \tag{10}$$

olduğunda Tekrarlama Metodu uygulanabilir. <u>*Şart sağlanmadığı takdirde çözüm çıkabilir, fakat mutlaka çözüm çıkacağına garanti vermez*</u>.

Veya $x \in [a,b]$ aralığında ve bu aralıkta, $x = x_i = a$ ve $x = x_i = b$ alındığında, $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ şartı sağlanıyor ve aynı zamanda $x_{i+1} = g(x_i)$ için

$$\boxed{\left|\frac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L, \quad \forall x_i, x_{i+1} \in [a,b], \quad L \in (0,1)} \tag{11}$$

şartı sağlanıyor ise tekrarlama usulü kullanılabilir. <u>*Denklem (11) in kullanılması her zaman daha uygundur.*</u> <u>*Denklem (11) i sağlayan bütün $x \in [a,b]$ değerleri hesaplamalarda başlangıç değeri olarak kullanılabilir*</u>. İşlemlerin anlaşılması için Misal 3.3.3 bakınız.

3.3.1 Misal

$\boxed{\sin(x) + x = 1}$ şeklinde verilen denklemde, $x \in [0,1]$ aralığında tekrarlama metodu ile kökünün bulunup bulunmayacağını test ediniz.

Çözüm: ilk önce verilen x aralığında fonksiyonun değerlerinden birisi pozitif ise diğeri negatif olmalıdır. Bu durum test edilmelidir. $f(x) = \sin(x) + x - 1$

$f(0) = \sin(0) + 0 - 1 \rightarrow f(0) = -1$, $f(1) = \sin(1) + 1 - 1 \rightarrow f(1) = +0.84147$

$f(0) \cdot f(1) = (-1) \cdot (+0.84147) < 0 \rightarrow \boxed{f(0) \cdot f(1) < 0}$ olduğundan verilen aralık uygundur. Şimdi de seçilecek olan g(x) fonksiyonunun uygun olup olmadığı test edilmelidir. Bunun için ilk olarak Denklem (10) ile test edilebilir. $\sin(x) + x - 1 = 0 \quad x = 1 - \sin(x)$

Buradan g(x) fonksiyonu için, $g(x) = 1 - \sin(x) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} g(x) = -\cos(x)}$ yazılabilir.

$$\boxed{\left|\frac{d}{dx} g(x)\right|_{x=a} < L, \quad (L < 1)} \rightarrow \boxed{|-\cos(0)| < L, \quad (L < 1)} \rightarrow \boxed{1 < L, \quad (L < 1)}$$

Şartın sağlanmadığı görüldü. <u>*Bu demektir ki şart sağlanmasa da çözüm çıkabilir. Fakat mutlaka çözümün olacağını garanti etmez*</u>. <u>*Bu sebeple, Denklem (11) kullanılır ise, her zaman garantili sonuç elde edilir.*</u> x=0 için;

$x_{i+1} = g(x_i) \rightarrow x_{i+1} = g(0) = 1 - \sin(0) \rightarrow x_{i+1} = 1$

$g(x)=1-\sin(x)$ → $g(0)=1-\sin(0)$ → $g(0)=1$, $g(1)=1-\sin(1)$ → $g(1)=0.1585290$

$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L, \quad \forall x_i, x_{i+1} \in [a,b], \quad L\in(0,1)$ $\left|\frac{g(0)-g(1)}{0-1}\right| = \left|\frac{(1)-(0.1585290)}{0-1}\right| = 0.841470984807897$ →

$\boxed{0.841470984807897<1}$ uygundur. Aynı işlem x=1 yapılmalıdır.

$x_{i+1}=g(x_i)$ → $x_{i+1}=g(1)=1-\sin(1)$ → $x_{i+1}=0.1585290152$

$g(x)=1-\sin(x)$ → $g(1)=1-\sin(1)$ → $g(1)=0.1585290152$

$g(0.1585290152)=1-\sin(0.1585290152)$ → $g(0.1585290)=0.8421341616$

$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|$ → $\left|\frac{g(1)-g(0.1585290152)}{1-0.1585290152}\right|$ → $\left|\frac{0.1585290152-0.8421341616}{1-0.1585290152}\right| = 0.8123930103$

$\boxed{0.8123930103<1}$ şartı da sağlandığından seçilen g(x) foksiyonunun kullanılması uygundur. Görüldüğü gibi test fonksiyonu olarak Denklem (10) yerine, Denklem (11) in kullanılması daha uygundur. Aartık bundan sonra başlangıç değeri olarak $x\in[0,1]$ seçilecek her bir değer için çözüm mevcuttur.

$\boxed{x_{i+1}=g(x_i)=1-\sin(x_i)}$

1. tekrarlama sonucu: $x_1=1-\sin(x_0)=1-\sin(0.25)=$ 0.752596040745477
2. tekrarlama sonucu: $x_2=1-\sin(0.752596040745477)=0.31646404491987$
3. tekrarlama sonucu: $x_3=1-\sin(0.31646404491987)$=0.688791852695812
4. tekrarlama sonucu: $x_4=1-\sin(0.688791852695812)=0.364395060896358$

Bu işlemler artırıldığında kök değeri $x_r=0.5109734294$ olarak bulunur.

3.3.2 Misal

$x^2-9\cdot x-10=0$ ile verilen denklemde x değerinin tekrarlama metodu ile $x\in[-8,1]$ aralığında çözümün olup olmadığını tesbit ediniz. Çözümü varsa uygun olan g(x) fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm: ilk önce tekrarlama usülü ile çözülüp çözülemiyeceği test edilmelidir. x*=-8 için f(x)=126 ve x=1 için f(x)=-18 ve* $\boxed{f(-8)\cdot f(+1)<0}$ *olduğundan bu aralıkta kök değeri vardır* ve bu değerler için ilk önce uygun g(x) fonksiyonu belirlenmelidir.

1. yol: Öyle bir g(x) fonksiyonu seçilmelidir ki bu fonsiyonun verilen aralıktaki 1. türevlerinde bu değerler yazıldığında, elde edilen sayı 1 den küçük olmalıdır.

$f(x)=x^2-9\cdot x-10=0$ olduğu görülür. Buradan; $x\cdot(x-9)-10=0$ yazılabilir veya $x\cdot(x-9)=10$ olur. Buradan g(x) fonksiyonu için;

$x=\frac{10}{x-9}$ → $\boxed{g(x)=\frac{10}{x-9}}$ yazılabilir. Bu fonksiyonun 1. türevi alındığında,

$\frac{d}{dx}g(x)=-\frac{10}{(x-9)^2}$ olur. (Denklem (10) ile test edildiğinden dolayı).

Zekeriya Girgin

x=1 için test edilmelidir.

$$\left|\frac{d}{dx}g(x)\right| = \left|-\frac{10}{(x-9)^2}\right| = \left|-\frac{10}{(1-9)^2}\right| = \left|-\frac{10}{(-8)^2}\right| = 0.15625 < L$$

olduğundan 1. şart sağlandı. 2. şart için x=-8 değeri yazıldığında çıkan değer 1 den küçük olmalıdır.

$$\left|\frac{d}{dx}g(x)\right| = \left|-\frac{10}{(x-9)^2}\right| = \left|-\frac{10}{(-8-9)^2}\right| = \left|-\frac{10}{(-17)^2}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{10}{-289}\right| = 0.034602076 < L$$

Bu değerler aşağıdaki şartı sağladığından uygundur.

$$\boxed{\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|_{x=-8} = 0.034602076 < L}, \quad \boxed{\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|_{x=1} = 0.15625 < L} \quad \boxed{L,\quad \forall x,y \in [a,b],\quad L<1}$$

Elde edilen bu iki değer, 1 den küçük ve sıfırdan büyük olduğundan, bu aralıkta alınan her değer için g(x) fonksiyonu çözüme gider. Diğer bir test Denklem (11) ile yapılabilir.

İlk önce $\left(f(a)\cdot f(b)<0\right)$ şartı test edilmelidir.

$$f(x) = x^2 - 9\cdot x - 10 = 0 \rightarrow f(1) = 1^2 - 9\cdot 1 - 10 = -18$$

$$f(-8) = (-8)^2 - 9\cdot(-8) - 10 = 64 + 72 - 10 = +126 \rightarrow \boxed{\left(f(1)\cdot f(-8) < 0\right)}$$

şartı sağlandı Şimdi diğer şart,

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow g(x_i) = \frac{10}{x_i - 9} \rightarrow g(1) = \frac{10}{1-9} = -\frac{5}{4} \quad g(x_{i+1}) = \frac{10}{x_{i+1}-9} \rightarrow g\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{10}{-\frac{5}{4}-9} = -\frac{40}{41}$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\frac{-\frac{5}{4}-\left(-\frac{40}{41}\right)}{1-\left(-\frac{5}{4}\right)}\right| = \left|-\frac{5}{41}\right| = |-0.1219512195| = \boxed{0 < 0.1219512195 < 1}$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow g(x_i) = \frac{10}{x_i - 9} \rightarrow g(-8) = \frac{10}{(-8)-9} = -\frac{10}{17}$$

$$g(x_{i+1}) = \frac{10}{x_{i+1}-9} \rightarrow g\left(-\frac{10}{17}\right) = \frac{10}{-\frac{10}{17}-9} = -\frac{170}{163} \rightarrow \left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\frac{-\frac{10}{17}-\left(-\frac{170}{163}\right)}{-8-\left(-\frac{10}{17}\right)}\right|$$

$$= \left|-\frac{10}{163}\right| = |-0.06134969325| \rightarrow \boxed{0 < 0.06134969325 < 1}$$

olduğundan seçilen g(x) fonksiyonu ile çözüm yapılabileceği görülmektedir. f(x) fonksiyonundan elde edilen tüm g(x) fonksiyonlarında bu şartlar denenmelidir.

2. yol: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

Zekeriya Girgin

$f(x)=x^2-9\cdot x-10=0 \quad \rightarrow 9\cdot x=x^2-10=0 \rightarrow x=\frac{x^2-10}{9} \rightarrow g(x)=\frac{x^2-10}{9}$

$g(x_i)=\frac{x_i^2-10}{9} \rightarrow g(1)=\frac{1^2-10}{9}=-1 \text{ , } g(-1)=\frac{(-1)^2-10}{9}=-1$

$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\frac{(-1)-(-1)}{1-(-1)}\right|=\left|\frac{0}{+2}\right|=\boxed{0.0<1}$

Şart sağlandığı için, seçilen ikinci g(x) fonksiyonu da çözüm için kullanılabilir

Böylece;

1. tekrarlama sonucu: $g(x_1)=\frac{x_0^2-10}{9}=\frac{(-8)^2-10}{9}=6$

2. tekrarlama sonucu: $g(x_2)=\frac{x_1^2-10}{9}=\frac{(6)^2-10}{9}=\frac{26}{9}=2.88888888888889$

3. tekrarlama sonucu: $g(x_3)=\frac{x_2^2-10}{9}=\frac{(2.88889)^2-10}{9}=-0.183813$

4. tekrarlama sonucu: $g(x_4)=\frac{x_3^2-10}{9}=\frac{(-0.183813)^2-10}{9}=-1.10736$

Bu işlemler artırıldığında kök değeri $\boxed{x_r=-1}$ olarak bulunur.

3. yol: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

$f(x)=x^2-9\cdot x-10=0 \rightarrow x^2=9\cdot x+10 \rightarrow x=\sqrt{9\cdot x+10} \rightarrow g(x)=\sqrt{9\cdot x+10}$

x=-1 için test edilmelidir.

$\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|=\left|\sqrt{9\cdot(1)+10}\right|=\boxed{4.35889894354067<1}$ şart sağlanmadı

$\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|=\left|\sqrt{9\cdot(-8)+10}\right|=\left|\sqrt{-62}\right| \rightarrow$ sayı gerçel sayı değildir ve uygun değil.

Yani bu değerler için *Denklem (10) kullanıldığında, çözümün mutlaka olacağı garanti edilemez. Bunun için Denklem (11) ile g(x) fonksiyonu tekrar test edilmelidir*.

$g(x)=\sqrt{9\cdot x+10}$

3.3.3 Misal

$e^x=4x^2$ verilen denklemin kökleri $x_1=0.7148059124$ ve $x_2=4.306584728$ olduğu biliniyor. Bu sonuçları elde eden uygun g(x) fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm: ilk olarak g(x) fonksiyonları belirlensin.

1. $e^x=4x^2 \rightarrow e^x=4\cdot x\cdot x \rightarrow x=g(x)=\frac{e^x}{4\cdot x}$ (1)
2. $e^x=4x^2 \rightarrow x^2=\frac{e^x}{4} \rightarrow x=g(x)=\frac{\sqrt{e^x}}{2}$ (2)

Zekeriya Girgin

3. $\ln\left(e^{x}\right)=\ln(4)+\ln\left(x^{2}\right) \rightarrow x=g(x)=\ln(4)+2\cdot\ln(x)$ (3)

Üç farklı g(x) fonksiyonu belirlendi. İlk kök değerinin hesaplanabilmesi için aralık değeri olarak, $x\in[0,1]$ aralığı seçildiğinde bu aralığın uygun olmadığı fakat $x\in[0.1,1]$ aralığının uygun olduğu görülecektir. (1) nolu g(x) fonksiyonunda x=0 alındığında,

$g(x)=\dfrac{e^{x}}{4\cdot x} \rightarrow g(0)=\dfrac{e^{0}}{4\cdot 0}=\dfrac{1}{0}=\infty$ olduğu görülecektir. Bunun yerine $x\in[0.1,1]$ aralığı dikkate alınıp Denklem (11) ile test edildiğinde,

$$g(0.1)=\frac{e^{0.1}}{4\cdot 0.1}=2.7629 \rightarrow g(2.7629)=\frac{e^{2.7629}}{4\cdot 2.7629}=1.4338$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L \rightarrow \left|\frac{2.7629-1.4338}{0.1-2.7629}\right|=0.49912<1$$

Daha yeterli değildir. Aynı zamanda x=1 için de test edilmelidir.

$$g(1)=\frac{e^{1}}{4\cdot 1}=0.67957 \rightarrow g(0.67957)=\frac{e^{0.67957}}{4\cdot 0.67957}=0.72584$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L \rightarrow \left|\frac{0.67957-0.72584}{1-0.67957}\right|=0.499115<1$$

Olduğundan bu aralıktaki kökü bu g(x) fonksiyonu ile çözmek mümkündür. Fakat aynı g(x) fonksiyonu ikinci kökü bulmak için uygun değildir. Çünkü, $x\in[4,5]$ olarak seçildiğinde,

$$g(4)=\frac{e^{4}}{4\cdot 4}=3.4124 \rightarrow g(3.4124)=\frac{e^{3.4124}}{4\cdot 3.4124}=2.2226$$

$\left|\dfrac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L \rightarrow \left|\dfrac{3.4124-2.2226}{4-3.4124}\right|=2.0248>1$ olduğundan uygun değildir.

Yani bir aralıkta geçerli olan g(x) fonksiyonu diğer aralıkta geçerli olmayabilir. $x\in[4,5]$ aralığına uygun olan g(x) fonsiyonu, $g(x)=\ln(4)+2\cdot\ln(x)$ ifadesidir.

$$g(x)=\ln(4)+2\cdot\ln(x) \rightarrow g(4)=\ln(4)+2\cdot\ln(4) \rightarrow g(4)=4.1589$$

$$g(4.1589)=\ln(4)+2\cdot\ln(4.1589) \rightarrow g(4.1589)=4.2368$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L \rightarrow \left|\frac{4.1589-4.2368}{4-4.1589}\right|=0.49033<1$$

$$g(5)=\ln(4)+2\cdot\ln(5) \rightarrow g(5)=4.6052$$

$$g(4.6052)=\ln(4)+2\cdot\ln(4.6052) \rightarrow g(4.6052)=4.4407$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L \rightarrow \left|\frac{4.6052-4.4407}{5-4.6052}\right|=0.41668<1$$

Zekeriya Girgin

$x \in [0.1, 1]$ aralığında, Denklem (11) sağlandığından, $g(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$ fonksiyonu da uygundur. x_0=1 alındığında elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

İterasyon sayısı	x	$g(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$
1	1.0000000000	0.8243606354
2	0.8243606354	0.7550533554
3	0.7550533554	0.7293361786
4	0.7293361786	0.7200179827
5	0.7200179827	0.7166711511
6	0.7166711511	0.7154728652
7	0.7154728652	0.7150443230
8	0.7150443230	0.7148911261
9	0.7148911261	0.7148363687
10	0.7148363687	0.7148167976
11	0.7148167976	0.7148098028
12	0.7148098028	0.7148073028
23	0.7148059124	0.7148059124

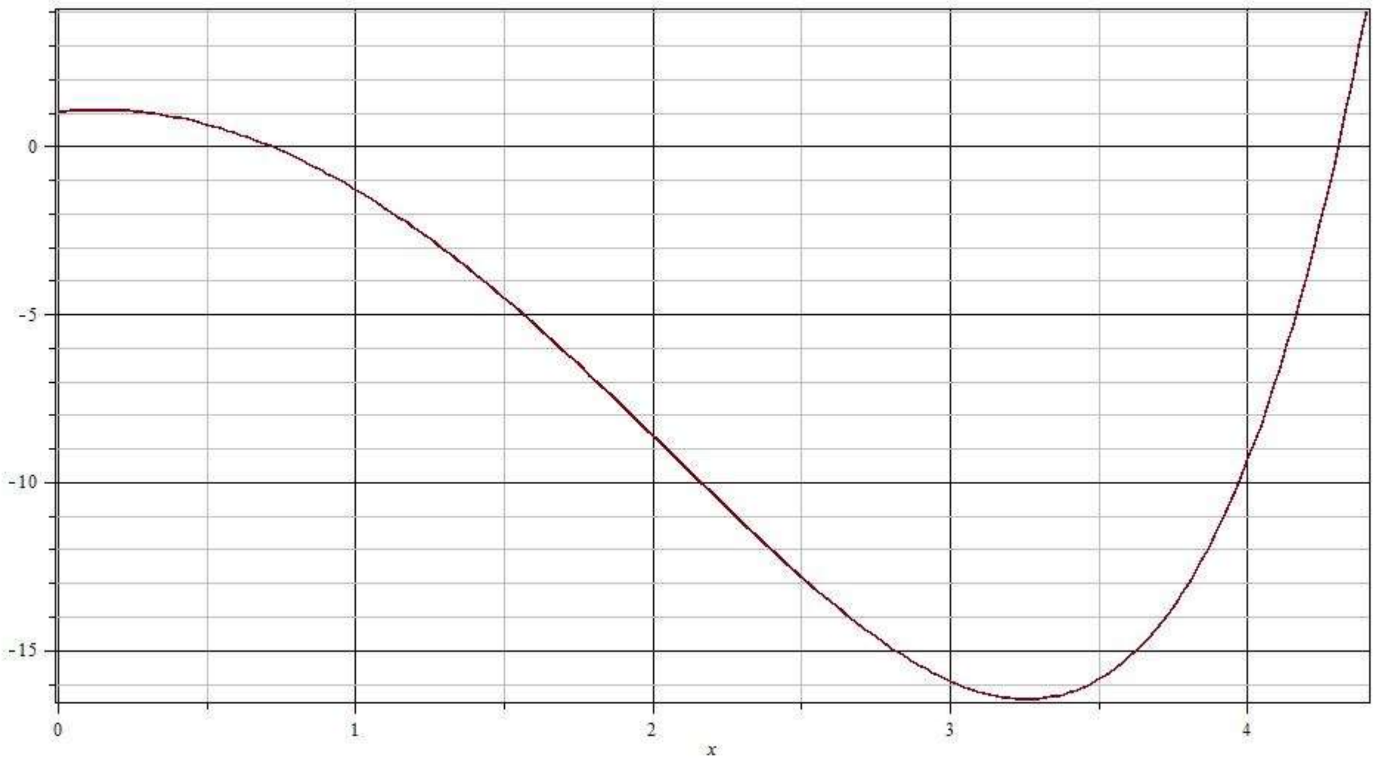
Bu işlemler devam ettiğinde, 23. Tekrarda x=0.7148059124 değerine ulaşır. Diğer bir çözüm olarak g(x) fonksiyonu, $\ln(e^x) = \ln(4) + 2 \cdot \ln(x)$ → $x = \ln(4) + 2 \cdot \ln(x)$ → $x = g(x)$ → $g(x) = \ln(4) + 2 \cdot \ln(x)$ alındığında uygundur. Burada başlangıç değeri daha büyük olan x_0=5 olarak alınmıştır ve buna uygun sonuçlarda aşağıda verilmiştir.

İterasyon sayısı	x	$g(x) = \ln(4) + 2 \cdot \ln(x)$
1	5.0000000000	4.6051701860
2	4.6051701860	4.4406536127
3	4.4406536127	4.3678975125
4	4.3678975125	4.3348579109
5	4.3348579109	4.3196720262
6	4.3196720262	4.3126533201

Zekeriya Girgin

7	4.3126533201	4.3094010296
8	4.3094010296	4.3078922055
9	4.3078922055	4.3071918352
10	4.3071918352	4.3068666519
11	4.3068666519	4.3067156508
12	4.3067156508	4.3066455284
13	4.3066455284	4.3066129639
...	...	...
32	4.3065847282	4.3065847282

iterasyona devam edildiğinde x=4.306584728 değeri elde edilir. Her iki kök değeri de doğrudur. Burada iterasyona 5 değeri ile başlatıldı. $x \in [4,5]$ aralığındaki bütün x değerleri için g(x) fonksiyonu aynı sonuçları hesaplar. Aşağıda fonksiyonun grafiği verilmiştir.



3.3.4 Misal

$x^2 + 5 \cdot x = e^x$ ile verilen denkleminin kökünü, tekrarlama metodu ile çözebilmek için $x \in [3,4]$ aralığını kullanarak; bu aralıkta çözümü veren g(x) fonksiyonunu bulunuz ve Tekrarlama Metodu ile verilen aralıkta $(x = 3.5)$ başlangıç değerini kullanarak, 3. tekrarlamaya kadar olan kök değerini hesaplayınız.

Çözüm: ilk olarak g(x) fonksiyonları belirlensin.

ilk olarak g(x) fonksiyonları belirlensin.

4. $x^2 + 5 \cdot x = e^x \rightarrow x \cdot (x+5) = e^x \rightarrow \ln(x) + \ln(x+2) = \ln(e^x) \rightarrow x = g(x) = \ln(x) + \ln(x+5)$ (1)

5. $x^2 + 5 \cdot x = e^x \rightarrow x \cdot (x+5) = e^x \rightarrow x = g(x) = \dfrac{e^x}{(x+5)}$ (2)

6. $x^2 + 5 \cdot x = e^x \rightarrow x = \sqrt{e^x - 5 \cdot x} \rightarrow x = g(x) = \sqrt{e^x - 5 \cdot x}$ (3)

7. $x^2 + 5 \cdot x = e^x \rightarrow 5 \cdot x = e^x - x^2 \rightarrow x = g(x) = \dfrac{e^x - x^2}{5}$ (4)

Dört farklı g(x) fonksiyonu belirlendi. Kök değerinin hesaplanabilmesi için, $x \in [3,4]$ aralığı seçilir ve bu aralığın uygun olmadığı test edilmelidir.

$g(x) = \ln(x) + \ln(x+5) \rightarrow g(3) = \ln(3) + \ln(3+5) \rightarrow g(3) = 3.17805383034795$

$g(3.178) = \ln(3.178) + \ln(3.178+5) \rightarrow g(4) = 3.25772321066384$

$\left|\dfrac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\dfrac{3.178 - 3.2577}{3 - 3.178}\right| = 0.447 < 1 \rightarrow$ uygundur. $(x = 4)$ için aynı test yapılmalıdır.

$g(4) = \ln(4) + \ln(4+5) \rightarrow g(4) = 3.58351893845611$

$g(3.5835) = \ln(3.5835) + \ln(3.5835+5) \rightarrow g(3.5835) = 3.42618922344825$

$\left|\dfrac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\dfrac{3.5835 - 3.4262}{1 - 3.5835}\right| = 0.37776 < 1$ olduğundan bu aralıktaki kökü, bu g(x) fonksiyonu ile çözmek mümkündür.

İterasyon sayısı	x	$g(x) = \ln(x) + \ln(x+5)$
001	3.50000000	3.39282913
002	3.39282913	3.34904179
003	3.34904179	3.33082105
004	3.33082105	3.32318085
005	3.32318085	3.31996691
006	3.31996691	3.31861309
…	…	…
021	3.31762660	3.31762660
022	3.31762660	3.31762660

3.3.5 Misal

$x^3 - x - 1 = 0$ ile verilen denkleminde $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, $x \in [a,b]$ ilk önce $x \in [a,b]$ şartını sağlayan aralığı belirleyiniz ve daha sonra bu aralıkta çözümü veren g(x) fonksiyonunu bulup değerinin tekrarlama metodu ile belirleyiniz.

Zekeriya Girgin

Çözüm: ilk görünüşte $f(x)=x^3-x-1$ denkleminde uygun aralık belirlenmelidir.

$f(0)=0^3-0-1 \rightarrow f(0)=-1$, $f(5)=5^3-5-1 \rightarrow f(5)=119 \rightarrow f(0)\cdot f(5)=(-1)\cdot(119)<0$ olduğundan alınan aralık uygundur. Fakat bu $x\in[0,5]$ aralığı daha da daraltılabilir.

$f(0)\cdot f(2)=(-1)\cdot(5)<0$ seçilirse daha da uygun olur. Şimdi de çözümü verebilecek g(x) fonksiyonu belirlenmelidir. Bunun için;

1. tercih: $x^3-x-1=0 \rightarrow x=x^3-1 \rightarrow \boxed{g(x)=x^3-1}$ olur. x=a değeri yerine yazılarak test edildiğinde,

$$\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a}=\left|3\cdot x^2\right|=\left|3\cdot 0^2\right|=0<1, \quad \left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=b}=\left|3\cdot x^2\right|=\left|3\cdot 2^2\right|=\boxed{12<1}$$

__ikinci şart sağlanmadığından seçilen g(x) fonksiyonu uygun değildir__. Aynı test Denklem (11) ile yapıldığında,

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \rightarrow \left|\frac{g(0)-g(2)}{0-2}\right| \rightarrow \boxed{\left\|\frac{(-1)-(7)}{0-2}\right|=4\le L, \quad \forall x,y\in[a,b], \quad L\in(0,1)}$$

yine geçersiz çözüm fonksiyonu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla başka bir g(x) çözüm fonksiyonu belirlenmelidir:

2. tercih: $x^3-x-1=0 \rightarrow x^3=x+1 \rightarrow x=(x+1)^{1/3} \rightarrow \boxed{g(x)=(x+1)^{1/3}}$ olur.

Şimdi yeni g(x) fonksiyonu için Denklem (11) ile test yapılabilir.

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \rightarrow \left|\frac{g(0)-g(2)}{0-2}\right|=0.2211247850 \rightarrow \boxed{0<0.2211247850<1}$$

Şartın sağlandığı görülmektedir. Fonksiyon incelendiğinde,

3. tercih: $x^3-x-1=0 \rightarrow x\cdot(x^2-1)-1=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{x^2-1} \rightarrow \boxed{g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}}$ olur.

Denklem (11) ile test edildiğinde;

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \rightarrow \left|\frac{g(0)-g(2)}{0-2}\right| \rightarrow \boxed{\left\|\frac{(-1)-(1/3)}{0-2}\right|=0.6666666667\le L, \quad \forall x,y\in[a,b], \quad L\in(0,1)}$$

olduğundan çözüm fonksiyonu olarak seçilen g(x) fonksiyonunun geçerli olduğu görülmektedir.

4. tercih: $x^3-x-1=0 \rightarrow x^2\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1=0 \rightarrow x^2=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}} \rightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}} \rightarrow \boxed{g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$ olur.

Denklem (11) ile test edildiğinde,

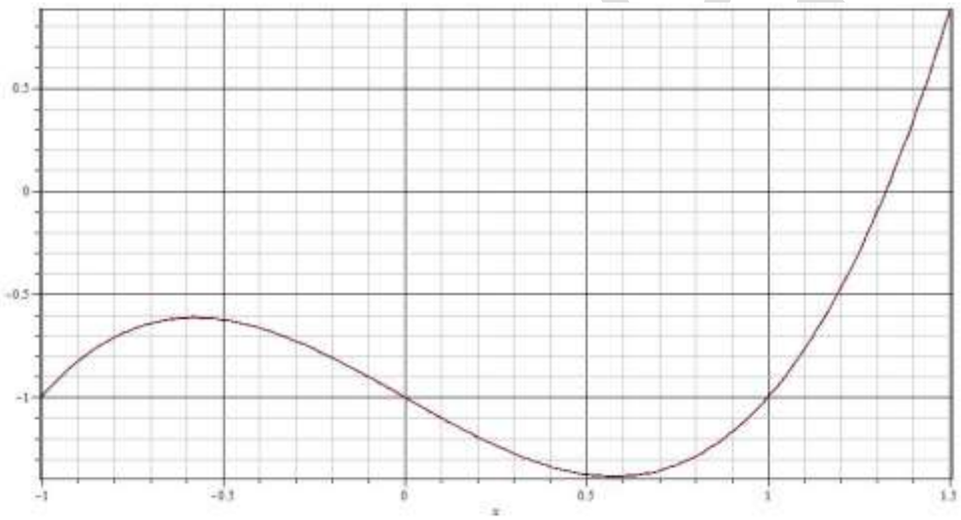
$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \rightarrow \left|\frac{g(0)-g(2)}{0-2}\right| \rightarrow \boxed{\left\|\frac{(\infty)-(0.8164965809)}{0-2}\right|=\infty\le L, \quad \forall x,y\in[a,b], \quad L\in(0,1)}$$

olduğundan __uygun olmadığı__ görülmektedir. 2. tercihte verilen g(x) fonksiyonu seçilerek çözüm yapıldığında; $g(x)=(x+1)^{1/3}$ başlangıç olarak $\boxed{x=2}$ değeri seçildi.

Zekeriya Girgin

Tekrar sayısı	x_i	$g(x_i)$	İterasyon sayısı	x_i	$g(x_i)$
1.	2.0000000000	1.4422495703	11.	1.3247179943	1.3247179643
2.	1.4422495703	1.3466767037	12.	1.3247179643	1.3247179586
3.	1.3466767037	1.3288758858	13.	1.3247179586	1.3247179575
4.	1.3288758858	1.3255072719	14.	1.3247179575	1.3247179573
5.	1.3255072719	1.3248678680	15.	1.3247179573	1.3247179573
6.	1.3248678680	1.3247464317	16.	1.3247179573	1.3247179572
7.	1.3247464317	1.3247233659	17.	1.3247179572	1.3247179572
8.	1.3247233659	1.3247189846	18.	1.3247179572	1.3247179572
9.	1.3247189846	1.3247181524	19.	1.3247179572	1.3247179572
10.	1.3247181524	1.3247179943	20.	1.3247179572	1.3247179572

17. tekrarlamadan sonra kök değerinin x=1.3247179572 olarak değişmediği görülmektedir. Aşağıda gösterildiği gibi, fonksiyonun grafiğine bakarak da kök değeri tahmin görülmektedir.edilebilir.



3.3.6 Misal

$x^3 - 2\cdot x^2 + 4\cdot x - 5 = 0$ ile verilen denkleminde denkleminin kökünü Tekrarlama metodu ile çözebilmek için $x \in [0,3]$ aralığını kullanarak,

a) Bu aralıkta çözümü veren uygun bir g(x) fonksiyonunu bulunuz.

b) Tekrarlama Metodu (Fixed point iteration) ile verilen aralıkta 10 tekrarlamaya kadar kök değerini hesaplayınız.

c) Bu aralıktaki gerçek kök değeri x=1.5259574806492964 olduğuna göre, 3. Tekrarlama sonucunda elde edilen kök değeri ile yapılan bağıl hatayı hesaplayınız.

Çözüm: ilk görünüşte $f(x)=x^3-2\cdot x^2+4\cdot x-5$ denkleminde uygun aralık belirlenmelidir.

$f(0)=0^3-2\cdot 0^2+0\cdot x-5$ → $f(0)=-5$, $f(3)=3^3-2\cdot 3^2+4\cdot 3-5$ → $f(3)=16$ → $f(0)\cdot f(3)=(-5)\cdot(16)<0$ olduğundan alınan aralık uygundur. Şimdi de çözümü verebilecek g(x) fonksiyonu belirlenmelidir. Bunun için;

1. tercih: $x^3-2\cdot x^2+4\cdot x-5=0$ → $x=\dfrac{-x^3+2\cdot x^2+5}{4}$ → $\boxed{g(x)=\dfrac{-x^3+2\cdot x^2+5}{4}}$ olur. $(x=0)$ değeri yerine yazılarak test edildiğinde,

$\left|\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=0}=\left|\dfrac{3}{4}\cdot x^2+x+1\right|=\left|\dfrac{3}{4}\cdot 0^2+0+1\right|=1<1$, şart sağlanmadı. Uygun değildir. $(x=3)$ değeri yerine yazılarak test edildiğinde, $(x=x_i=0)$ → $g(x_i)=\dfrac{-x_i^3+2\cdot x_i^2+5}{4}$ → $g(0)=\dfrac{-0^3+2\cdot 0^2+5}{4}$

$\left|\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=3}=\left|\dfrac{3}{4}\cdot x^2+x+1\right|=\left|\dfrac{3}{4}\cdot 3^2+3+1\right|=2.75<1$ *ikinci şart da sağlanmadığından seçilen g(x) fonksiyonu uygun değildir*. Aynı test Denklem (11) ile yapıldığında, ilk önce $(x=0)$ için test edilmelidir.

$\left|\dfrac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|\le L,\quad \forall x_i,x_{i+1}\in[a,b],\quad L\in(0,1)\quad x_{i+1}=g(x_i)$ → $x_{i+1}=g(0)$ → $x_{i+1}=1.25$

$\left|\dfrac{g(0)-g(1.25)}{0-1.25}\right|$ → $\left|\dfrac{1.25-2.792968750}{0-1.25}\right|=1.234375<1$ şartı sağlanmadığından geçersizdir.

x=b için kontrol edilmelidir.

$\left|\dfrac{g(3)-g(2)}{3-2}\right|=\left|\dfrac{2-3.25}{3-2}\right|=1.25<1$ yine geçersiz çözüm fonksiyonu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla başka bir g(x) çözüm fonksiyonu belirlenmelidir.

2. tercih: $x^3-2\cdot x^2+4\cdot x-5=0$ → $x=\dfrac{\sqrt{2x^3+8x-10}}{2}$ → $\boxed{g(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3+8x-10}}{2}}$ olur. x=a değeri yerine yazılarak test edildiğinde,

$\left|\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=0}=\left|\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6\cdot x^2+8}{\sqrt{2\cdot x^3+8\cdot x-10}}\right|=\left|\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6\cdot 0^2+8}{\sqrt{2\cdot 0^3+8\cdot 0-10}}\right|=-0.6324555320\cdot i<1$, şart sağlanmadı. Sayı sanal çıktı.

$\left|\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=3}=\left|\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6\cdot x^2+8}{\sqrt{2\cdot x^3+8\cdot x-10}}\right|=\left|\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6\cdot 3^2+8}{\sqrt{2\cdot 3^3+8\cdot 3-10}}\right|=1.879651094<1$ *ikinci şart da sağlanmadığından seçilen g(x) fonksiyonu uygun değildir* Aynı test Denklem (11) ile yapıldığında, ilk önce $(x=0)$ için test edilmelidir. $x_{i+1}=g(x_i)$ → $x_2=g(x_1)$ → $x_2=g(0)$ → $x_2=1.581138830\cdot I$. Sonuç sanal sayı olduğundan uygun değildir. Şart sağlanmadı. x=b için kontrol edilmelidir.

Zekeriya Girgin

$x_{i+1} = g(x_i) \rightarrow x_2 = g(x_1) \rightarrow x_2 = g(3) \rightarrow x_2 = 4.1231$

$\left|\frac{g(3)-g(4.123105626)}{3-4.123105626}\right| = \left|\frac{4.1231-6.386909195}{3-4.1231}\right| = 2.015663992 < 1$ yine geçersiz çözüm fonksiyonu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla başka bir g(x) çözüm fonksiyonu belirlenmelidir.

3. tercih: $x^3 - 2\cdot x^2 + 4\cdot x - 5 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5} \rightarrow \boxed{g(x) = \sqrt[3]{2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5}}$ olur. x=a değeri yerine yazılarak test edildiğinde,

$\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot x - 4}{(2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5)^{2/3}}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 0 - 4}{(2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 5)^{2/3}}\right| = 0.4559935859 < 1$, şart sağlandı.

$\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=3} = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot x - 4}{(2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5)^{2/3}}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 3 - 4}{(2\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 5)^{2/3}}\right| = 0.5391466887 < 1$ *ikinci şart da sağlandığından seçilen g(x) fonksiyonu uygundur* Aynı test Denklem (11) ile yapıldığında, ilk önce $(x=0)$ için test edilmelidir. $x_{i+1} = g(x_i) \rightarrow x_2 = g(x_1) \rightarrow x_2 = g(0) \rightarrow x_2 = 1.709975947$.

$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L, \quad \forall x_i, x_{i+1} \in [a,b], \quad L \in (0,1) \rightarrow \left|\frac{g(0)-g(1.709975947)}{0-1.709975947}\right|$

$\left|\frac{1.709975947-1.588476011}{0-1.709975947}\right| = 0.07105359360 < 1$ Şart sağlandı. Aynı işlem x=b için yapılmalıdır.

$\left|\frac{g(3)-g(2.223980091)}{3-2.223980091}\right| = \left|\frac{2.22398-1.816742404}{3-2.22398}\right| = 0.5247773701 < 1$ Şart sağlandı. Dolayısıyla, bu bir çözüm fonksiyonudur.

x_0=3 alındığında elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tekrar sayısı	x	$g(x) = \sqrt[3]{2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5}$
1	0.0000000000	1.7099759467
2	1.7099759467	1.5884760116
3	1.5884760116	1.5456496861
4	1.5456496861	1.5319753431
5	1.5319753431	1.5277780456
6	1.5277780456	1.5265065225
7	1.5265065225	1.5261229012
8	1.5261229012	1.5260073057
9	1.5260073057	1.5259724868

Zekeriya Girgin

10	1.5259724868	1.5259620000
...	...	...
25	1.5259574806	1.5259574806

25. tekrarlamadan sonra sonuçların değişmediği görülmektedir. x=0 alındığında 3. tekrarlamadan sonra yapılan Bağıl hata miktarı;

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}{\text{Gerçek Değer}} = \frac{1.5259574806492964 - 1.5456496861}{1.5259574806492964}$$

$\boxed{\text{Bağıl Hata} = -0.0409700347083}$ olarak hesaplanır.

Eğer başlangıç değeri olarak x=3 alınıp işleme devam edilirse aşağıdaki tablo değerleri bulunur.

Tekrar sayısı	x	$g(x) = \sqrt[3]{2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5}$
1	3.0000000000	2.2239800906
2	2.2239800906	1.8167424041
3	1.8167424041	1.6304251101
4	1.6304251101	1.5597884382
5	1.5597884382	1.5364022089
6	1.5364022089	1.5291277098
7	1.5291277098	1.5269145198
8	1.5269145198	1.5262459151
9	1.5262459151	1.5260443659
10	1.5260443659	1.5259836492
...	...	...
27	1.5259574806	1.5259574806

Sonuçlar her iki durumda da elde edilmektedir. x=3 alındığında 3. tekrarlamadan sonra yapılan Bağıl hata miktarı;

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}{\text{Gerçek Değer}} = \frac{1.5259574806492964 - 1.6304251101}{1.5259574806492964}$$

$\boxed{\text{Bağıl Hata} = -0.190558994664}$ olarak hesaplanır.

Zekeriya Girgin

3.3.7 Misal

$x^3 - x^2 - x - 5 = 0$ ile verilen denkleminin kökünü tekrarlama metodu ile çözebilmek için $x \in [0,3]$ aralığını kullanarak,

a. Bu aralıkta çözümü veren bir g(x) fonksiyonunu bulunuz (hangi g(x) fonksiyonunun uygun olduğu test edilerek gösterilecek)

b. Tekrarlama Metodu (Fixed point iteration) ile verilen aralıkta x=3 başlangıç değerini kullanarak, 2 tekrarlamaya kadar olan kök değerini hesaplayınız.

Çözüm: ilk önce tekrarlama usülü ile çözülüp çözülemiyeceği test edilmelidir. *x=0 için f(0)=-5 ve x=3 için f(3)=10 ve* $\boxed{f(0)\cdot f(3) = -50 < 0}$ *olduğundan bu aralıkta kök değeri vardır*

ve bu değerler için ilk önce uygun g(x) fonksiyonu belirlenmelidir. Şartları sağlayan g(x) fonksiyonu belirlendikten sonra x_i başlangıç değeri olarak $(0 \le x_i \le 3)$ şartını sağlayan her değer kullanılabilir.

1. tercih: Öyle bir g(x) fonksiyonu seçilmelidir ki bu fonsiyonun verilen aralıktaki 1. türevlerinde bu değerler yazıldığında, elde edilen sayı 1 den küçük olmalıdır.

$f(x) = x^3 - x^2 - x - 5 = 0$ olduğu görülür. Buradan;

$x = x^3 - x^2 - 5$ olur. Buradan g(x) fonksiyonu için;

$\boxed{g(x) = x^3 - x^2 - 5}$ yazılabilir. Bu fonksiyonun 1. türevi alındığında,

$\frac{d}{dx} g(x) = 3\cdot x^2 - 2\cdot x$ olur. (Denklem (10) ile test edildiğinden dolayı).

x=0 için test edilmelidir.

$$\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| = \left|3\cdot x^2 - 2\cdot x\right| = \left|3\cdot 0^2 - 2\cdot 0\right| = |0| = 0.15625 < L$$

olduğundan 1. şart sağlandı. 2. şart için x=3 değeri yazıldığında çıkan değer 1 den küçük olmalıdır.

$\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| = \left|3\cdot x^2 - 2\cdot x\right| = \left|3\cdot 3^2 - 2\cdot 3\right| = |21| > 1$ şart sağlanmadığından uygun değildir.

Diğer bir test Denklem (11) ile yapılabilir.

İlk önce $(f(a)\cdot f(b) < 0)$ şartı test edilmelidir. $\boxed{f(0)\cdot f(3) = -50 < 0}$ → şartı sağlandı Şimdi diğer şart,

$\left|\frac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L$ → $g(x_i) = x_i^3 - x_i^2 - 5$ → $g(0) = 0^3 - 0^2 - 5$ → $g(0) = -5$ $g(x_{i+1}) = x_{i+1}^3 - x_{i+1}^2 - 5$ →

$g(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 5 = -155$

$\left|\frac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right| \le L$ → $\left|\frac{-5 - (-155)}{0 - (-5)}\right| = \left|\frac{150}{5}\right| = \boxed{30 > 1}$ Uygun değildir.

Zekeriya Girgin

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; g(x_i)=x_i^3-x_i^2-5 \rightarrow\; g(3)=3^3-3^2-5 \;\rightarrow\; g(3)=13 \quad g(x_{i+1})=x_{i+1}^3-x_{i+1}^2-5 \;\rightarrow$$

$$g(13)=(13)^3-(13)^2-5=2023$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; \left|\frac{13-(2023)}{3-(13)}\right|=|201|=\boxed{201>1}$$ Uygun değildir.

2. tercih: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

$$x^3-x^2-x-5=0 \;\rightarrow\; x\cdot(x^2-x-1)-5=0 \;\rightarrow\; x=\frac{5}{(x^2-x-1)} \;\rightarrow\; g(x)=\frac{5}{x^2-x-1}$$

Denklem (11) ile test edildiğinde;

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; g(x_i)=\frac{5}{x_i^2-x_i-1} \rightarrow\; g(0)=\frac{5}{0^2-0-1} \;\rightarrow\; g(0)=-5 \quad g(x_{i+1})=\frac{5}{x_{i+1}^2-x_{i+1}-1} \;\rightarrow$$

$$g(-5)=\frac{5}{(-5)^2-(-5)-1} \;\rightarrow\; g(-5)=0.1724137931$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; \left|\frac{-5-(0.1724137931)}{0-(-5)}\right|=1.034482759>1$$ *uygun değildir*.

3. tercih: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

$$x^3-x^2-x-5=0 \;\rightarrow\; x^2=x^3-x-5 \;\rightarrow\; x=\sqrt{x^3-x-5} \;\rightarrow\; g(x)=\sqrt{x^3-x-5}$$

Denklem (11) ile test edildiğinde;

$g(x_i)=\sqrt{x_i^3-x_i-5} \rightarrow g(0)=\sqrt{0^3-0-5} \rightarrow g(0)=\sqrt{-5}$ *sayı sanal sayı olduğundan uygun değildir*.

4. tercih: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

$$x^3-x^2-x-5=0 \;\rightarrow\; x^2\cdot x-x^2=x+5 \;\rightarrow\; x^2\cdot(x-1)=x+5 \;\rightarrow\; g(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}$$

Denklem (11) ile test edildiğinde;

$g(x_i)=\sqrt{\frac{x_i+5}{x_i-1}} \rightarrow g(0)=\sqrt{\frac{0+5}{0-1}}=\sqrt{-5} \rightarrow g(0)=\sqrt{-5}$ *sayı sanal sayı olduğundan uygun değildir*.

5. tercih: başka bir g(x) fonksiyonu seçilsin.

$$x^3-x^2-x-5=0 \;\rightarrow\; x^3=x^2+x+5 \;\rightarrow\; x=\sqrt[3]{x^2+x+5} \;\rightarrow\; g(x)=\sqrt[3]{x^2+x+5}$$

Denklem (11) ile test edildiğinde;

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; g(x_i)=\sqrt[3]{x_i^2+x_i+5} \rightarrow\; g(0)=\sqrt[3]{0^2+0+5} \;\rightarrow\; g(0)=1.71 \quad g(x_{i+1})=\sqrt[3]{x_{i+1}^2+x_{i+1}+5} \;\rightarrow$$

$$g(1.71)=\sqrt[3]{1.71^2+1.71+5} \;\rightarrow\; g(1.71)=2.127822772$$

$$\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \;\rightarrow\; \left|\frac{1.71-(2.127822772)}{0-(1.71)}\right|=\boxed{0.2443583056<1}$$ Uygundur.

$\left|\dfrac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \qquad g(x_i)=\sqrt[3]{x_i^2+x_i+5} \rightarrow \qquad g(3)=\sqrt[3]{3^2+3+5} \qquad \rightarrow \qquad g(3)=2.571281591$

$g(x_{i+1})=\sqrt[3]{x_{i+1}^2+x_{i+1}+5} \rightarrow g(2.57)=\sqrt[3]{2.57^2+2.57+5} \rightarrow g(2.57)=2.420585122$

$\left|\dfrac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right| \le L \rightarrow \left|\dfrac{2.57-(2.420585122)}{3-(2.57)}\right| = \boxed{0.3515045443<1}$ Uygundur.

x_0=3 alındığında elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tekrar sayısı	x	$g(x)=\sqrt[3]{x^2+x+5}$
1.	3.0000000000	2.5712815907
2.	2.5712815907	2.4205851219
3.	2.4205851219	2.3680854445
4.	2.3680854445	2.3498816368
5.	2.3498816368	2.3435814191
6.	2.3435814191	2.3414024324
7.	2.3414024324	2.3406489898
8.	2.3406489898	2.3403884886
9.	2.3403884886	2.3402984234
10.	2.3402984234	2.3402672847
...	...	...
24	2.3402508301	2.3402508301

24. tekrarlamadan sonra sonuçların değişmediği görülmektedir.

3.4 Newton-Raphson Yöntemi (Newton–Raphson Method):

Newton–Raphson metodu da açık aralıklı ve bir başlangıç değeri ile çözüm yapılabilen bir metottur.Fonksiyounun başlangıçta verilen noktasındaki eğimi yani birinci türevi yazıldığında grafikten iterasyon yöntemi elde edilir.
Fonksiyonun $x=x_i$ deki değeri $f(x_i)$ ve eğimi yani birinci türevi karşı dik kenarın komşu dik kenara oranı olduğundan;

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i+1}}$$

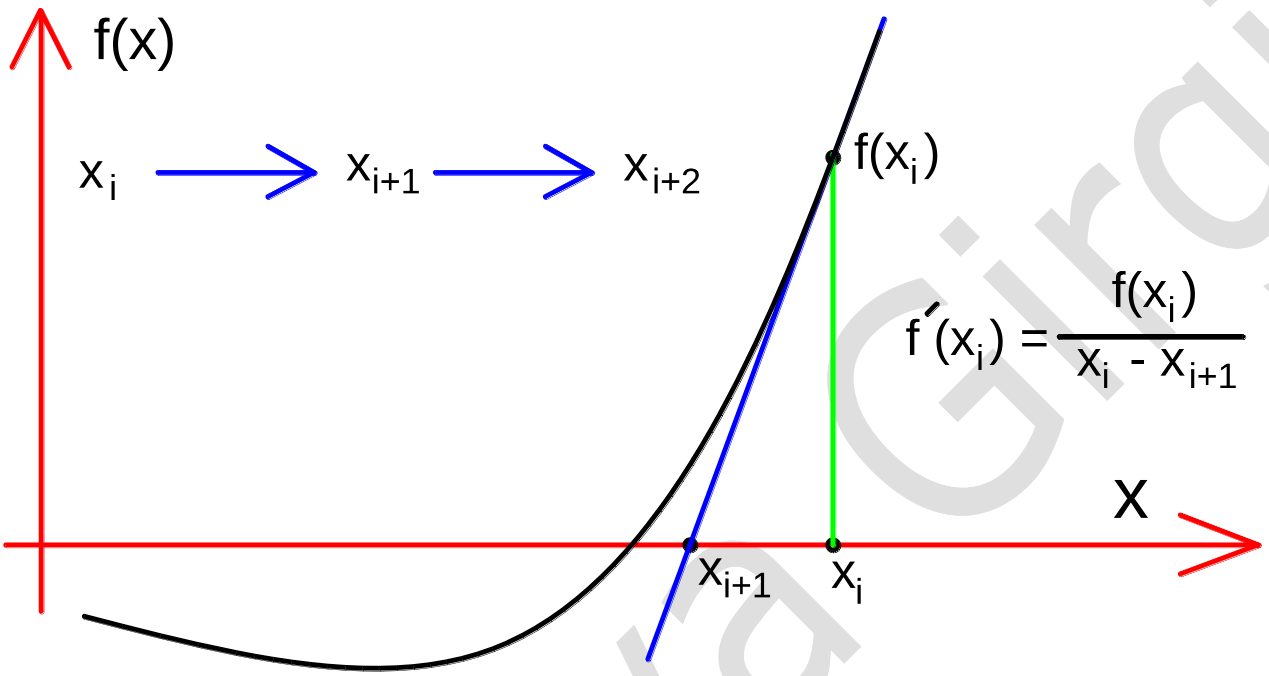
ile tanımlıdır. Bu ifade tekrar düzenlendiğinde;

Zekeriya Girgin

$$x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \qquad (12)$$

Bu ifade Newton-Raphson metodu ile nasıl kök bulunacağını gösterir. Aynı ifade Taylor serisinden de elde edilebilir.

$$f(x_{i+1}) = \sum \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3 + \ldots \qquad (13)$$



Şekil 3-3: Newton-Raphson metodunun grafik gösterimi

Yukarıdaki Taylor serisinde ilk iki ifade alınıp sıfıra eşitlendiğinde Newton-Raphson denklemi ortaya çıkar.

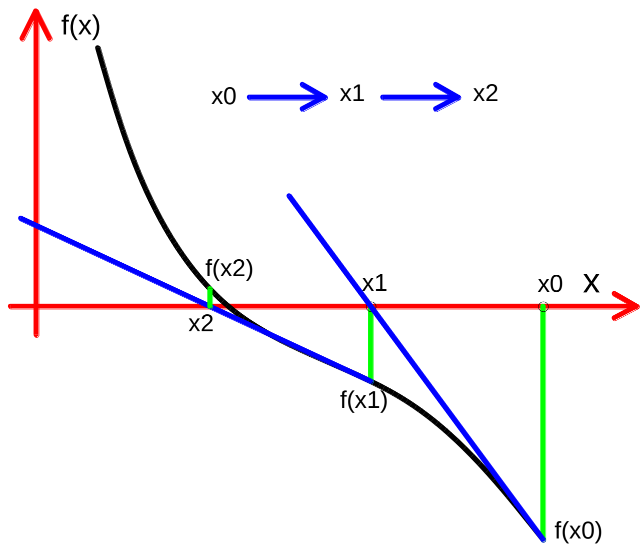
$$f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) = 0 \rightarrow (x_{i+1}-x_i) = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (14)$$

Görüldüğü gibi Denklem (14) ile verilenin aynısı elde edilmiştir. Eğer Newton-Raphson denklemi daha hassas hale getirilmek istenirse, Taylor serisinde iki terim yerine üç alınır ve daha hızlı, hassas sonuçlar elde edilebilir.

$$f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 = 0$$

Aşağıdaki grafikte ise fonksiyona başlangıçta x0 değeri verildiğinde 1. ve 2. iterasyonlarda x değerinin nasıl köke yaklaştığı grafik olarak verilmiştir.

Zekeriya Girgin



Şekil 3-4: Newton-Raphson metodunda x in iki tekrarlama ile köke yaklaşımı

Algorithm for The Newton–Raphson Method:

```
Given f(x)=0, ε and the initial point x0;
Given max=maximum number of iterations; Find f'(x);
For i=0 to max
Compute x(i+1)=x(i)-f(x)/f'(x);
     If |xi+1-xi| < ε
          Solution= xi+1;
          Stop the iterations;
     Endif
Endfor
```

3.4.1 Misal:

Bir yay üzerine h kadar yükseklikten bir m kütlesi serbest olarak bırakılıyor. Bu yayın davranışı nonlineer olup kuvvet ve yerdeğiştirme bağıntısı, $F = k_1 \cdot y + k_2 \cdot y^{3/2}$ ile verilmektedir. Sistemde enerji kaybolmadığına göre, yayın çökebileceği maximum değeri hesaplayınız. (Başlangıç değeri olarak y_0=0.5 alınız.)

Çözüm: Maximum çökme halindeki toplam enerji miktarı; yayın kinetik enerjisi ile potansiyel enerjinin toplamı olduğundan, yayın kinetik enerjisi için;

$$\int_0^y F \cdot dy = \int \left(k_1 \cdot y + k_2 \cdot y^{3/2}\right) \cdot dy = \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{2}{5} k_2 y^{5/2}$$

ifadesi yazılabilir. Potansiyel enerji aşağı doğru negatif olduğundan, toplam enerji,

$$f = \frac{1}{2} k_1 y^2 - mgy - mgh + \frac{2}{5} k_2 y^{5/2}$$

ile tanımlıdır. Burada $k_1 = 40000$, $k_2 = 40$, $m = 95$, $g = 9.81$, $h = 0.43$ alınacaktır. Newton-Raphson prensibinin uygulanabilmesi için,y ye göre türevi alındığında;

$$\frac{df}{dy} = f'(y) = k_1 \cdot y - m \cdot g + k_2 \cdot y^{3/2}$$

olur. Buradan Newton Raphson uygulamasına geçildiğinde;

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)} \rightarrow y_{i+1} = y_i - \frac{\frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot y^2 - m \cdot g \cdot y - m \cdot g \cdot h + \frac{2}{5} \cdot k_2 \cdot y^{5/2}}{k_1 \cdot y - m \cdot g + k_2 \cdot y^{3/2}}$$

Zekeriya Girgin

$$y_{i+1} = y_i - \frac{\frac{1}{2}\cdot 40000\cdot y^2 - 95\cdot 9.81\cdot y - 95\cdot 9.81\cdot 0.43 + \frac{2}{5}\cdot 40\cdot y^{5/2}}{40000\cdot y - 95\cdot 9.81 + 40\cdot y^{3/2}}$$

$$y_{i+1} = 0.5 - \frac{\frac{1}{2}\cdot 40000\cdot (0.5)^2 - 95\cdot 9.81\cdot 0.5 - 95\cdot 9.81\cdot 0.43 + \frac{2}{5}\cdot 40\cdot (0.5)^{5/2}}{40000\cdot 0.5 - 95\cdot 9.81 + 40\cdot (0.5)^{3/2}} = 0.1 - \frac{-293.883}{3067.54} = 0.195804 \rightarrow$$

- olarak hesaplanır. Bu değerler tablo halinde verilebilir.

Tekrar sayısı	y_i	y_{i+1}	$f(y)$	$f'(y)$
1.	0.500000	0.283247	4.136115e+03	1.908219e+04
2.	0.283247	0.192844	9.405540e+02	1.040398e+04
3.	0.192844	0.168736	1.635785e+02	6.785200e+03
4.	0.168736	0.166737	1.163153e+01	5.820260e+03
5.	0.166737	0.166724	7.992558e-02	5.740273e+03
6.	0.166724	0.166724	3.879739e-06	5.739716e+03
7.	0.166724	0.166724	6.633583e-15	5.739716e+03
8.	0.166724	0.166724	6.633583e-15	5.739716e+03
9.	0.166724	0.166724	6.633583e-15	5.739716e+03
10.	0.166724	0.166724	6.633583e-15	5.739716e+03

3.4.2 Misal:

Newton-Raphson metodunu kullanarak $f(x) = e^{-x} - x$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_0 = 0$ kullanınız.

Çözüm: temel formülün kullanılabilmesi için fonksiyonun x e göre türevinin hesaplanması gerekir. $f(x) = e^{-x} - x \rightarrow f'(x) = -e^{-x} - 1$ olur. verilen değerler aşağıdaki denklemde yerine yazıldığında 1. iterasyon sonunda x değeri;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{e^{-x_0} - x_0}{-e^{-x_0} - 1}$$

$x_1 = 0 - \frac{e^{-0} - 0}{-e^{-0} - 1} = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5$ olarak hesaplanır. Bu değerler tablo halinde verilebilir.

Tekrar sayısı	x_i	x_{i+1}	$f(x)$	$f'(x)$
1.	0	0.5	1	-2
2.	0.5	0.566311	0.106531	-1.60653
3.	0.566311	0.567143	0.00130451	-1.56762
4.	0.567143	0.567143	1.9648e-07	-1.56714
5.	0.567143	0.567143	4.55191e-15	-1.56714

3.4.3 Misal:

$x^3 - 10\cdot x^2 + 34\cdot x - 40 = 0$ ile verilen denklemin köklerini başlangıçta x_0=1 alarak, Newton-Raphson yöntemi ile hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: fonksiyonun ilk önce x e göre türevinin hesaplanması gerekir. $f(x) = x^3 - 10 \cdot x^2 + 34 \cdot x - 40 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 34$ olur. verilen değerler aşağıdaki denklemde yerine yazıldığında 1. iterasyon sonunda x değeri;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{x^3 - 10 \cdot x^2 + 34 \cdot x - 40}{3 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 34} \rightarrow x_1 = 1 - \frac{x^3 - 10 \cdot 1^2 + 34 \cdot 1 - 40}{3 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + 34} = 1 - \frac{-15}{17} = 1.882353$$

olarak hesaplanır. Bu değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir. Dikkat edilirse, 9. iterasyondan sonra değerler değişmemektedir.

İterasyon sayısı	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
1.	1.000000	1.882353	-15.0000000	17.0000000
2.	1.882353	2.564449	-4.7628740	6.9826990
3.	2.564449	3.264339	-1.7078808	2.4402143
4.	3.264339	4.420178	-0.7870654	0.6809473
5.	4.420178	4.119102	1.2676370	4.2103601
6.	4.119102	4.012604	0.2682647	2.5189650
7.	4.012604	4.000157	0.0255283	2.0508937
8.	4.000157	4.000000	0.0003138	2.0006276
9.	4.000000	4.000000	0.0000000	2.0000001
10.	4.000000	4.000000	-0.0000000	2.0000000

Görüldüğü gibi 9. tekrarlamadan sonra değerler değişmemektedir.

3.4.4 Misal:

$\frac{e^x}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10 = 0$ ile verilen denklemin köklerini başlangıçta x_0=10 alarak, Newton-Raphson yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm: fonksiyonun ilk önce x e göre türevinin hesaplanması gerekir. $f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10 \rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + 2$ olur. verilen değerler aşağıdaki denklemde yerine yazıldığında 1. iterasyon sonunda x değeri;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10}{\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + 2}$$

Zekeriya Girgin

$$x_1 = x_{i+1} = x_i - \frac{\frac{e^{10}}{10} - \frac{\sin(10)}{10^2} + 2\cdot 10 - 10}{\frac{e^{10}}{10} - \frac{e^{10}}{10^2} - \frac{\cos(10)}{10^2} + 2\cdot\frac{\sin(10)}{10^3} + 2} = 10 - \frac{2212.6520190}{1984.3892240} = 8.884971$$ olarak hesaplanır.

Bu değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir. Dikkat edilirse, 9. iterasyondan sonra değerler değişmemektedir.

İterasyon sayısı	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
1.	10.000000	8.884971	2212.6520197	1984.3892242
2.	8.884971	7.750550	820.6646368	723.4218234
3.	7.750550	6.590304	305.1858400	263.0354614
4.	6.590304	5.402652	113.6393005	95.6839736
5.	5.402652	4.220189	41.9215999	35.4527832
6.	4.220189	3.198698	14.6138632	14.3064027
7.	3.198698	2.646653	4.0625294	7.3590588
8.	2.646653	2.545519	0.5555301	5.4930243
9.	2.545519	2.543010	0.0131400	5.2368582
10.	2.543010	2.543009	0.0000076	5.2307798
11.	2.543009	2.543009	0.0000000	5.2307763

Görüldüğü gibi 11. tekrarlamadan sonra değerler değişmemektedir.

3.4.5 Misal:

$2\cdot e^x - x^2 - 1 = 0$ ile verilen denklemin köklerini başlangıçta $x_1 = 3$ değerini kullanarak, **Newton-Raphson** yöntemi ile 3. tekrarlamaya kadar ayrıntılı olarak hesaplayınız

Çözüm: ilk önce fonksiyonun x e göre türevi alınmalıdır.

$$f(x) = 2\cdot e^x - x^2 - 1 \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{2\cdot e^x - x^2 - 1}{2\cdot e^x - 2\cdot x} \rightarrow x_1 = 3 - \frac{30.1710738400}{34.1710738400}$$

$$\boxed{x_1 = 2.1170580710} \rightarrow x_2 = 2.1170580710 - \frac{11.1313929000}{12.3792116400} \rightarrow \boxed{x_2 = 1.2178576030}$$

$$x_3 = 1.2178576030 - \frac{4.2767004610}{4.3241623960} \rightarrow \boxed{x_3 = 0.2288335865}$$

İterasyon sayısı	x_{i+1}	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
1.	3.000000	2.117058	30.1710738	34.1710738
2.	2.117058	1.217858	11.1313929	12.3792116
3.	1.217858	0.228834	4.2767005	4.3241624
4.	0.228834	-0.482001	1.4619008	2.0565985
5.	-0.482001	-0.483260	0.0027685	2.1990947
6.	-0.483260	-0.483259	-0.0000006	2.2000586
7.	-0.483259	-0.483259	-0.0000000	2.2000584

Zekeriya Girgin

8.	-0.483259	-0.483259	0.0000000	2.2000584
9.	-0.483259	-0.483259	0.0000000	2.2000584
10.	-0.483259	-0.483259	0.0000000	2.2000584

Yedinci tekrarlamadan sonra sonuçlar değişmemektedir.

3.5 İkinci Mertebe Newton-Raphson Yöntemi (Second Order Newton–Raphson Method):

Bu usül ile çözüm yapıldığında, genel olarak daha hızlı bir şekilde köke yaklaşıldığı görülür. Fakat bazen de zorlukla karşılaşılmaktadır. Temel formül olarak aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\boxed{x_{i+1}=x_i-\frac{f'(x)}{f''(x)}+\frac{\sqrt{\left(f'(x)\right)^2-2\cdot f(x)\cdot f''(x)}}{f''(x)}} \qquad (15)$$

Veya denklem daha sade olarak yazılabilir.

$$\boxed{x_{i+1}=x_i-\frac{f_1}{f_2}+\frac{\sqrt{f_1^2-2\cdot f\cdot f_2}}{f_2}} \qquad (16)$$

3.5.1 Misal:

İkinci Mertebeden Newton-Raphson usulünü (tarzını, metodunu, yöntemini) kullanarak yukarıda Misal 3.4.3 ile verilen $f(x)=x^3-10\cdot x^2+34\cdot x-40$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_0=1$ kullanınız.

Çözüm: temel formülün kullanılabilmesi için fonksiyonun x e göre türevlerinin hesaplanması gerekir. $f(x)=x^3-10\cdot x^2+34\cdot x-40 \rightarrow f'(x)=3\cdot x^2-20\cdot x+34 \rightarrow f''(x)=6\cdot x-20$ olur. verilen değerler aşağıdaki denklemde yerine yazıldığında 1. iterasyon sonunda x değeri;

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f'(x)}{f''(x)}+\frac{\sqrt{\left(f'(x)\right)^2-2\cdot f(x)\cdot f''(x)}}{f''(x)} \qquad x_{i+1}=x_i-\frac{f_1}{f_2}+\frac{\sqrt{f_1^2-2\cdot f\cdot f_2}}{f_2}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\left(3\cdot x^2-20\cdot x+34\right)}{(6\cdot x-20)}+\frac{\sqrt{\left(3\cdot x^2-20\cdot x+34\right)^2-2\cdot\left(x^3-10\cdot x^2+34\cdot x-40\right)\cdot(6\cdot x-20)}}{(6\cdot x-20)}$$

olarak hesaplanır. Bu değerler tablo halinde verilebilir.

İterasyon sayısı	x_i	x_{i+1}	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1.	1.000000	2.214286	-15.0000000	17.0000000	-14.0000000
2.	2.214286	2.790034	-0.6443149	2.4183673	-6.7142857
3.	2.790034	3.297483	-1.2484965	1.5249263	-3.2597934
4.	3.297483	3.689360	-0.7190011	-0.6038364	-0.2150999
5.	3.689360	4.017221	-0.4584258	1.0464698	2.1361626
6.	4.017221	3.999998	0.0350298	2.0697586	4.1033269
7.	3.999998	4.000000	-0.0000048	1.9999903	3.9999855

Zekeriya Girgin

8.	4.000000	4.000000	0.0000000	2.0000000	4.0000000
9.	4.000000	4.000000	-0.0000000	2.0000000	4.0000000
10.	4.000000	4.000000	0.0000000	2.0000000	4.0000000

Görüldüğü gibi 8. tekrarlamadan sonra değerler değişmemektedir. Zorluklar dikkate alındığında 1. mertebeden Newton-Raphson usulünün daha kolay uygulandığı görülmektedir.

3.5.2 Misal:

İkinci Mertebeden Newton-Raphson usulünü (tarzını, metodunu, yöntemini) kullanarak yukarıda Misal 3.4.4 ile verilen $f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}+2x-10$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_0=10$ kullanınız.

Çözüm: temel formülün kullanılabilmesi için fonksiyonun x e göre türevlerinin hesaplanması gerekir.

$$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}+2x-10 \rightarrow f'(x)=f_1=\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}-\frac{\cos(x)}{x^2}+2\cdot\frac{\sin(x)}{x^3}+2$$

$$f''(x)=f_2=\frac{e^x}{x}-2\cdot\frac{e^x}{x^2}+2\cdot\frac{e^x}{x^3}+\frac{\sin(x)}{x^2}+4\cdot\frac{\cos(x)}{x^3}-6\cdot\frac{\sin(x)}{x^4}$$

olur. Verilen değerler aşağıdaki denklemde yerine yazıldığında 1. iterasyon sonunda x değeri;

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f'(x)}{f''(x)}+\frac{\sqrt{\left(f'(x)\right)^2-2\cdot f(x)\cdot f''(x)}}{f''(x)} \qquad x_{i+1}=x_i-\frac{f_1}{f_2}+\frac{\sqrt{f_1^2-2\cdot f\cdot f_2}}{f_2}$$

olarak hesaplanır. Bu değerler tablo halinde verilebilir.

İterasyon sayısı	x_i	x_{i+1}	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1.	10.000000	8.901323	2212.6520197	1984.3892242	1806.1617251
2.	8.901323	7.770164	456.6291378	391.7287254	345.5848389
3.	7.770164	6.638553	310.3897879	267.6333629	236.5096217
4.	6.638553	5.457276	65.8381098	53.0005478	43.5001280
5.	5.457276	4.226283	43.9013714	37.0578567	30.0993010
6.	4.226283	3.194958	8.1562954	8.7165077	5.3552324
7.	3.194958	2.513253	4.0232074	7.3330557	4.2208844
8.	2.513253	2.543009	-0.1548115	5.1594811	2.3590589
9.	2.543009	2.543009	0.0000031	5.2307777	2.4199220
10.	2.543009	2.543009	0.0000000	5.2307763	2.4199207

Görüldüğü gibi 9. tekrarlamadan sonra değerler değişmemektedir. Zorluklar dikkate alındığında 1. mertebeden Newton-Raphson usulünün daha kolay uygulandığı görülmektedir.

3.6 Kiriş Yöntemi (Secant Method):

Newton-Raphson yöntemindeki en büyük zorluklardan biri, karmaşık olan fonksiyonların türevini almaktır. Fonksiyonun bu noktada türevini almak yerine, başlangıçta birbirine eşit olmayan fakat birbirine yakın iki başlangıç noktası seçildiğinde, Bu iki noktadan geçen

Zekeriya Girgin

doğru, fonksiyonun bu noktada yaklaşık olarak eğimini verdiğinden bu metoda Secant (eğim) metodu denir. İkiye bölme metodunda, seçilen iki noktanın keyfi olmayıp fonksiyonun bu iki noktadan birisinde negatif ise diğerinde pozitif olma zorunluluğu vardı. Burada ise böyle bir şart yoktur. Sadece seçilen iki nokta birbirine yakın olursa fonksiyonun eğimi de o derece doğru hesaplanacaktır. Bu durum Şekil 3-5 e dikkat bakıldığında, (x_{i-1}) ile (x_i) noktaları, birbirine ne kadar çok yakın seçilirse, mavi çizgi ile gösterilen doğrunun eğimi de o derece fonksiyonun eğimine yakın olacaktır.

Tekrarlama sonucunda elde edilen sonuç, kök değerine en yakın olduğu için, ikinci tekrarlamada seçilecek ikinci değer, tekrarlama değerine en yakın olursa, daha hızlı kök değerine gidilir.

Fonksiyonun $x = x_i$ deki değeri $f(x_i)$ ve eğimi yani birinci türevi geri farklar kullanılarak yazıldığında;

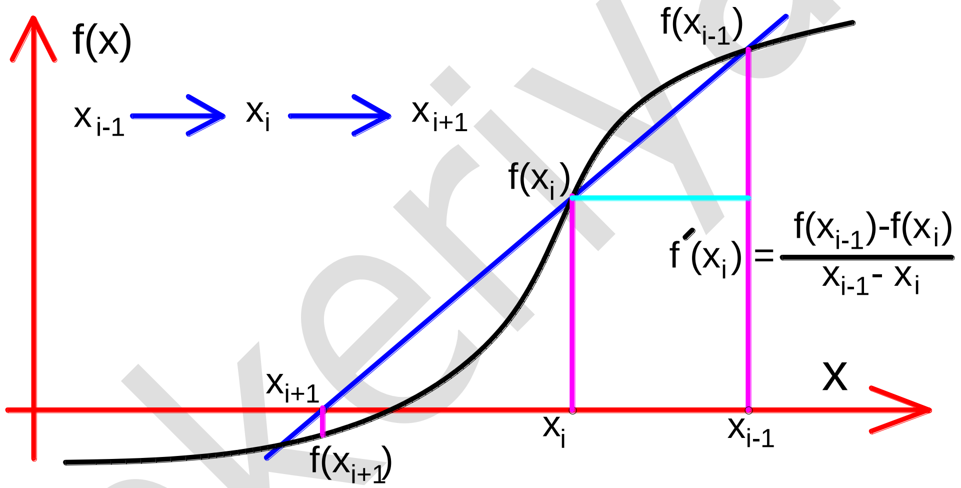
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f'(x_i)} = \frac{(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \qquad (17)$$

haline gelir. Bu ifade Newton-Raphson metodundaki türevde yerine konulduğunda;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}} \qquad (18)$$

Bu ifade Secant metodunun temel denklemidir ve kök değerleri bu denklem ile hesaplanır

Aşağıdaki grafikte ise fonksiyona başlangıçta x0 değeri verildiğinde 1. ve 2. iterasyonlarda x değerinin nasıl köke yaklaştığı grafik olarak verilmiştir.



Şekil 3-5: Secant metodunun grafik gösterimi

3.6.1 Misal:

Secant metodunu kullanarak $f(x) = e^{-x} - x$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_{-1} = 0.0$ ve $x_0 = 1.0$ kullanınız.

Çözüm: $f(x_{-1}) = e^{-x_{-1}} - x_{-1} \rightarrow f(x_{-1}) = e^{-0} - 0 = 1$, $f(x_0) = e^{-x_0} - x_0 \rightarrow f(x_0) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \quad \rightarrow \quad x_{i+1} = 1 - \frac{-0.6321205588 \cdot (0-1)}{1 + 0.6321205588}$$

Zekeriya Girgin

$x_1 = 1 - \dfrac{-0.6321205588 \cdot (0-1)}{1-(-0.6321205588)} = 1 - \dfrac{0.6321205588}{1+0.6321205588} = 0.61270 \rightarrow$ $x_1 = 0.61270$ değeri birinci iterasyon sonucunda elde edilen değerdir. Bu değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir.

İterasyon sayısı	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	f_{i-1}	f_i
1	0.00000000	1.00000000	0.61269984	1.00000000	-0.63212056
2	1.00000000	0.61269984	0.56383839	-0.63212056	-0.07081395
3	0.61269984	0.56383839	0.56717036	-0.07081395	0.00518235
4	0.56383839	0.56717036	0.56714331	0.00518235	-0.00004242
5	0.56717036	0.56714331	0.56714329	-0.00004242	-0.00000003
6	0.56714331	0.56714329	0.56714329	-0.00000003	0.00000000

Görüldüğü gibi kök değeri 4. iterasyondan sonra değişmemektedir.

3.6.2 Misal:

Kiriş (Secant) metodunu kullanarak $f(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_{-1} = 10.0$ ve $x_0 = 5.0$ kullanınız.

Çözüm: $f(x_{-1}) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10 \rightarrow f(10) = \dfrac{e^{10}}{10} - \dfrac{\sin(10)}{10^2} + 2 \cdot 10 - 10$

$f(10) = 2212.6520197 \rightarrow f(x_0) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x^2} + 2x - 10 \rightarrow f(5) = \dfrac{e^5}{5} - \dfrac{\sin(5)}{5^2} + 2 \cdot 5 - 10$

$f(5) = 29.7209888 \rightarrow x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i) \cdot (x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \rightarrow x_1 = 5 - \dfrac{29.7209888 \cdot (10-5)}{2212.6520197 - 29.7209888}$

$\boxed{x_1 = 4.931924}$ değeri birinci iterasyon sonucunda elde edilen değerdir. Bu değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir. Görüldüğü gibi kök değeri 10. tekrarlamadan sonra değişmemektedir.

İterasyon sayısı	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	f_{i-1}	f_i
1.	10.000000	5.000000	4.931924	2212.6520197	29.7209888
2.	5.000000	4.931924	3.813366	29.7209888	28.0159282
3.	4.931924	3.813366	3.234929	28.0159282	9.5495040
4.	3.813366	3.234929	2.754669	9.5495040	4.3319701
5.	3.234929	2.754669	2.578048	4.3319701	1.1647722
6.	2.754669	2.578048	2.544745	1.1647722	0.1847809
7.	2.578048	2.544745	2.543023	0.1847809	0.0090860
8.	2.544745	2.543023	2.543009	0.0090860	0.0000738
9.	2.543023	2.543009	2.543009	0.0000738	0.0000000
10.	2.543009	2.543009	2.543009	0.0000000	0.0000000

En basit haliyle, tabloya bakıldığında, tekrarlamadaki son iki değer, bir sonraki tekrarlamada kullanılmaktadır. Bu özellik ilk dört tekrarlamada mavi renkle belirtilmiştir. Kök değerine erişildiğinde, tekrarlamada elde edilen değerler değişmez hale gelir. Bu durum 10. tekrarlamada kırmızı renkle gösterilmiştir.

Zekeriya Girgin

3.6.3 Misal:

Kiriş (Secant) metodunu kullanarak $f(x)=e^{-2\cdot x}-x-\sin(x)+2$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. başlangıç değeri olarak $x_{-1}=0.5$ ve $x_0=1.0$ kullanınız.

Çözüm: $f(x)=e^{-2\cdot x}-x-\sin(x)+2 \rightarrow f(0)=e^{-2\cdot 0}-0-\sin(0)+2$

$f(0.5)=1.388454 \rightarrow f(1)=e^{-2\cdot 1}-1-\sin(1)+2 \rightarrow f(1)=0.293864$

$x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)\cdot(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)} \rightarrow x_{i+1}=1.0-\dfrac{f(1)\cdot(0.5-1)}{f(0.5)-f(1)} \rightarrow \boxed{x_1=1.134235}$ değeri birinci tekrarlama sonucunda elde edilen değerdir. Bu değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir. Görüldüğü gibi kök değeri 7. tekrarlamadan sonra değişmemektedir.

İterasyon sayısı	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	f_{i-1}	f_i
1	0.500000	1.000000	1.134235	1.388454	0.293864
2	1.000000	1.134235	1.170884	0.293864	0.063025
3	1.134235	1.170884	1.173486	0.063025	0.004178
4	1.170884	1.173486	1.173529	0.004178	0.000067
5	1.173486	1.173529	1.173529	0.000067	0.000000
6	1.173529	1.173529	1.173529	0.000000	0.000000
7	1.173529	1.173529	1.173529	0.000000	0.000000

En basit haliyle, tabloya bakıldığında, tekrarlamadaki son iki değer, bir sonraki tekrarlamada kullanılmaktadır. Bu özellik ilk dört tekrarlamada mavi renkle belirtilmiştir. Kök değerine erişildiğinde, tekrarlamada elde edilen değerler değişmez hale gelir. Bu durum 7. tekrarlamada kırmızı renkle gösterilmiştir.

3.7 Lineer olmayan Denklem Sistemleri (Nonlinear Systems of Equations)

Bazen karşımıza birden fazla denklem ve aynı denklem içerisinde birden fazla değişken olup bu denklemlerin aynı anda çözümlenmesi gerekir. Bunun bir misali Mekanizma dersinde kullanılan mekanizmaların konum, hız ve ivme analizleridir.
Meselenin daha rahat anlaşılması için; iki fonksiyon kabul edelim ve bu iki fonksiyon hem x hem de y ye bağlı olsun. Taylor serisi iki değişken için yazıldığında;

$$f(x-x_i,y-y_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\cdot\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\right|_{(x_i,y_i)}\cdot(x-x_i)^{n-k}\cdot(y-y_i)^k\right\}$$

haline gelir.Bu ifade birkaç terim için açılarak yazıldığında;

$$f(x_{i+1},y_{i+1})=f(x_i,y_i)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}-x_i)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_{i+1}-y_i)+\frac{1}{2!}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1}-x_i)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}-y_i)+\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y_{i+1}-y_i)^2\end{array}\right]+\ldots$$

Sadece 1. dereceden türevler dikkate alınarak tekrar yazıldığında;

$$f_{i+1}=f_i+\frac{\partial f_i}{\partial x}(x_{i+1}-x_i)+\frac{\partial f_i}{\partial y}(y_{i+1}-y_i) \qquad (19)$$

f(x,y) için yazılan değerler ikinci g(x,y) fonksiyonu için de yazıldığında,

Zekeriya Girgin

$$g_{i+1}=g_i+\frac{\partial g_i}{\partial x}\left(x_{i+1}-x_i\right)+\frac{\partial g_i}{\partial y}\left(y_{i+1}-y_i\right) \qquad (20)$$

olur. Denklem (19) ve (20) birer denklem olarak ele alındığında f_{i+1} ve g_{i+1} değerleri sıfıra eşit olacaktır. Böylece bu iki denklem,

$$\begin{aligned}f_{i+1}&=f_i+\frac{\partial f_i}{\partial x}\left(x_{i+1}-x_i\right)+\frac{\partial f_i}{\partial y}\left(y_{i+1}-y_i\right)=0\\ g_{i+1}&=g_i+\frac{\partial g_i}{\partial x}\left(x_{i+1}-x_i\right)+\frac{\partial g_i}{\partial y}\left(y_{i+1}-y_i\right)=0\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_{i+1}+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_{i+1}&=\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i\\ \frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_{i+1}+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_{i+1}&=\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i\end{aligned}$$

Burada bulunması gereken değerler x_{i+1} ve y_{i+1} olduğundan, bu değerler eşitliğin bir tarafında kalacak şekilde tekrar düzenlendiğinde,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_{i+1}+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_{i+1}=\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_{i+1}+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_{i+1}=\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i$$

haline gelir. İki bilinmeyenli denklemler için Cramer kuralı yazıldığında,

$$x_{i+1}=\frac{\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i\right) & \frac{\partial f_i}{\partial y}\\ \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i\right) & \frac{\partial g_i}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x} & \frac{\partial f_i}{\partial y}\\ \frac{\partial g_i}{\partial x} & \frac{\partial g_i}{\partial y}\end{vmatrix}},\quad y_{i+1}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x} & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i\right)\\ \frac{\partial g_i}{\partial x} & \left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x} & \frac{\partial f_i}{\partial y}\\ \frac{\partial g_i}{\partial x} & \frac{\partial g_i}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

olur. İfadeler açılarak tekrar düzenlendiğinde,

$$x_{i+1}=\frac{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i\right)\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-\left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i\right)\cdot\frac{\partial f_i}{\partial y}}{\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x}}$$

$$y_{i+1}=\frac{\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial g_i}{\partial y}\cdot y_i-g_i\right)-\frac{\partial g_i}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot x_i+\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot y_i-f_i\right)}{\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x}}$$

haline gelir. Gerekli kısaltmalar yapılarak Newton-Raphson formatında yazıldığında,

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f_i\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-g_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial y}}{\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x}},\quad y_{i+1}=y_i-\frac{g_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x}-f_i\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x}}{\frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial y}-\frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x}} \qquad (21)$$

olur. Denklem (21) veya Denklem (23) ile iki bilimeyenli sistemler için, aynı sonuçlar elde edilir. Aynı sonuçlar Jacobian Matrisi kullanılarak da elde edilebilir. Yukarıdaki gibi bu iki fonksiyon $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ olsun. Sayısal çözümleme için Newton-Rahpson yöntemi kullanılabilir. Bunun için matris formu gereklidir. Fonksiyonlarda x ve y oldğu için matris formu kullanılmalıdır. Buradan;

Zekeriya Girgin

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} - \frac{\begin{Bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}} \tag{22}$$

yazılabilir. Bu denklemlerin tekrar düzenlenmesiyle;

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{Jacobian Matrisi}} \begin{Bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{Bmatrix} \tag{23}$$

olur. Yukarıda türevleri ihtiva eden matrise "Jacobian Matrisi" denir ve Denklem (23) vasıtasıyla sistemin çözümü yapılır. Burada iki değişken (x ve y) verilmiştir. Değişken sayısı matris boyutu ile aynıdır. yani hesaplanması gereken n adet değişken var ise, matris boyutu (nxn) dir.

3.7.1 Misal

Aşağıda verilen Dört-kol mekanizmasında, a1, a2, a3 ve a4 kol uzunluklarını, θ_2, θ_3 ve θ_4 açıları sırasıyla 2, 3 ve 4 nolu elemanların +x ekseni ile yapmış olduğu açıyı tanımladığına göre; Kol uzunlukları ve 2 nolu elemanın +x ekseni ile yapmış olduğu açı verildiğinde θ_3 ve θ_4 açılarını sayısal olarak hesaplayınız. başlangıçta θ_3 ve θ_4 açıları 25 ve 85 derece olarak verilmiştir.

Çözüm: Şekilden kapalı vektör eşitliği elde edilir.

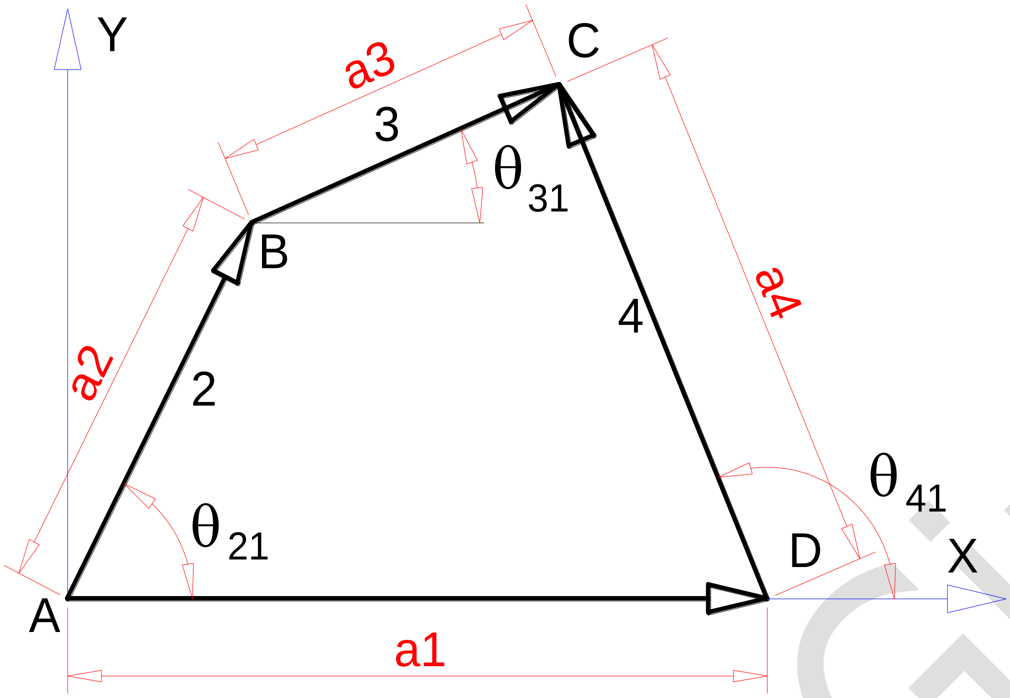
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \tag{24}$$

Bu eşitlik kartezyen koordinatlarda yazıldığında,

$$a_2 \cdot \left(\cos(\theta_2)\cdot \vec{i} + \sin(\theta_2)\cdot \vec{j}\right) + a_3 \cdot \left(\cos(\theta_3)\cdot \vec{i} + \sin(\theta_3)\cdot \vec{j}\right) = a_1 \cdot \vec{i} + a_4 \cdot \left(\cos(\theta_4)\cdot \vec{i} + \sin(\theta_4)\cdot \vec{j}\right) \tag{25}$$

Burada i li ve j li terimler ayrı ayrı toplandığında;

Zekeriya Girgin



Şekil 3-6: Dört-Kol mekanizmasının kapalı vektörel eşitliği ve açılarının gösterimi

$$f_1(\theta_3,\theta_4)=a_2\cdot\cos(\theta_2)+a_3\cdot\cos(\theta_3)-a_1-a_4\cdot\cos(\theta_4) \tag{26}$$

$$f_2(\theta_3,\theta_4)=a_2\cdot\sin(\theta_2)+a_3\cdot\sin(\theta_3)-a_4\cdot\sin(\theta_4) \tag{27}$$

$$\frac{\partial f_1(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_3}=-a_3\cdot\sin(\theta_3) \tag{28}$$

$$\frac{\partial f_1(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_4}=a_4\cdot\sin(\theta_4) \tag{29}$$

$$\frac{\partial f_2(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_3}=a_3\cdot\cos(\theta_3) \tag{30}$$

$$\frac{\partial f_2(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_4}=-a_4\cdot\cos(\theta_4) \tag{31}$$

Yukarıda elde edilen değerler, Denklem (21) da yerine yazıldığında,

$$\theta_3^{i+1}=\theta_3^{i}-\frac{f_1\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_4}-f_2\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\theta_4}}{\frac{\partial f_1}{\partial\theta_3}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_4}-\frac{\partial f_1}{\partial\theta_4}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_3}}\rightarrow\theta_3^{i+1}=\theta_3^{i}-\frac{f_1\cdot\left[-a_4\cdot\cos(\theta_4)\right]-f_2\cdot\left[a_4\cdot\sin(\theta_4)\right]}{\left[-a_3\cdot\sin(\theta_3)\right]\cdot\left[-a_4\cdot\cos(\theta_4)\right]-\left[a_4\cdot\sin(\theta_4)\right]\cdot\left[a_3\cdot\cos(\theta_3)\right]}$$

$$\theta_4^{i+1}=\theta_4^{i}-\frac{f_2\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\theta_3}-f_1\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_3}}{\frac{\partial f_1}{\partial\theta_3}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_4}-\frac{\partial f_1}{\partial\theta_4}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\theta_3}}\rightarrow\theta_4^{i+1}=\theta_4^{i}-\frac{f_2\cdot\left[-a_3\cdot\sin(\theta_3)\right]-f_1\cdot\left[a_3\cdot\cos(\theta_3)\right]}{\left[-a_3\cdot\sin(\theta_3)\right]\cdot\left[-a_4\cdot\cos(\theta_4)\right]-\left[a_4\cdot\sin(\theta_4)\right]\cdot\left[a_3\cdot\cos(\theta_3)\right]}$$

Zekeriya Girgin

haline gelir Bu denklemlerin kullanılması daha da kolaylık sağlayacaktır. Bunun yerine Denklem (23) esas alınarak yazıldığında, takriben 10 iterasyondan sonra cevapların değişmediği görülür. Her iki denklem ile aynı sonuçlar elde edilir.

$$\begin{Bmatrix}\theta_3^{i+1}\\ \theta_4^{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_3^{i}\\ \theta_4^{i}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_3} & \dfrac{\partial f_1(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_4}\\ \dfrac{\partial f_2(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_3} & \dfrac{\partial f_2(\theta_3,\theta_4)}{\partial\theta_4}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}f_1(\theta_3,\theta_4)\\ f_2(\theta_3,\theta_4)\end{Bmatrix}$$

veya

$$\begin{Bmatrix}\theta_3^{i+1}\\ \theta_4^{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_3^{i}\\ \theta_4^{i}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}-a_3\cdot\sin(\theta_3) & a_4\cdot\sin(\theta_4)\\ a_3\cdot\cos(\theta_3) & -a_4\cdot\cos(\theta_4)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}f_1(\theta_3,\theta_4)\\ f_2(\theta_3,\theta_4)\end{Bmatrix}$$ yazılabilir. Aşağıda verilen tabloda bazı sayısal değerler ve cevapları verilmiştir.

1. tekrarlama kullanılacak değerlerden bazıları aşağıdaki gibidir.

$$f_1(\theta_3,\theta_4)=a_2\cdot\cos(\theta_2)+a_3\cdot\cos(\theta_3)-a_1-a_4\cdot\cos(\theta_4)$$

$$f_1(\theta_3,\theta_4)=6\cdot\cos(60^\circ)+12\cdot\cos(25)-10-8\cdot\cos(85)\ \rightarrow\ f_1(\theta_3,\theta_4)=3.17844750245854$$

$$f_2(\theta_3,\theta_4)=a_2\cdot\sin(\theta_2)+a_3\cdot\sin(\theta_3)-a_4\cdot\sin(\theta_4)$$

$$f_2(\theta_3,\theta_4)=6\cdot\sin(60^\circ)+12\cdot\sin(25)-8\cdot\sin(85)\ \rightarrow\ f_2(\theta_3,\theta_4)=2.29801397886106$$

$$\begin{Bmatrix}0.18939101\\ 0.9275654579\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.4363323\\ 1.4835298\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}-5.07141914088 & 7.9695575847\\ 10.87569344443 & -0.69724594198\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}3.17844750\\ 2.29801397\end{Bmatrix}$$

Aşağıda 3 farklı veri için θ_3 ve θ_4 açıları hesaplanmıştır.

Verilenler: a1=10, a2=6, a3=12, a4=8, θ_2=60°		
İterasyon sayısı	**İstenenler**	
	θ_3(derece)	θ_4(derece)
1	10.85130558	53.14558596
2	4.92213408	51.16801711
3	5.20472689	51.77152180
4	5.20246653	51.76992993
5	5.20246656	51.76993000
6	5.20246656	51.76993000

Verilenler: a1=8, a2=6, a3=12, a4=8, θ_2=60°		
İterasyon sayısı	**İstenenler**	
	θ_3(derece)	θ_4(derece)

Zekeriya Girgin

1.	9.89027599	38.15537583
2.	-8.73903021	24.23104715
3.	-5.58541560	30.06201981
4.	-5.80620645	29.85247557
5.	-5.80605063	29.85303707
6.	-5.80605063	29.85303706
7.	-5.80605063	29.85303706

Verilenler: a1=8, a2=6, a3=12, a4=8, θ_2=45°		
İterasyon sayısı	**İstenenler**	
	θ_3(derece)	θ_4(derece)
1.	14.53015006	32.17420057
2.	-25.07699668	-10.44252808
3.	-8.94904594	16.25572334
4.	-13.85956358	9.69544554
5.	-13.99023365	9.65379086
6.	-13.98991825	9.65431359
7.	-13.98991826	9.65431358
8.	-13.98991826	9.65431358

3.7.2 Misal

$f_1(x_1,x_2)=x_1^2-10\cdot x_1+x_2^2+8=0$ ve $f_2(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2^2+x_1-10\cdot x_2+8=0$ denklemlerinde şartı sağlayan x_1 ve x_2 bilinmeyenlerini $(0<x_1,x_2<1.5)$ arasına hesaplayınız

Çözüm: Daha iyi anlaşılabilmesi için değişkenler mavi renkte verilmiştir.

1.Yol: Başlangıç değeri olarak; $\begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$ alınabilir ve buradan Newton-Raphson usülüne geçilir.

$$f_1(x_1,x_2)=x_1^2-10\cdot x_1+x_2^2+8$$

$$f_2(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2^2+x_1-10\cdot x_2+8$$

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}=2\cdot x_1-10$$

Zekeriya Girgin

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2 \cdot x_2$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2^2 + 1$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 10$$

Genel formül aşağıdadır.

$$\begin{Bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^{i} \\ x_2^{i} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{Bmatrix}$$

Bunun bu sisteme uyarlanmış hali

$$\begin{Bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^{i} \\ x_2^{i} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (2 \cdot x_1 - 10) & (2 \cdot x_2) \\ (x_2^2 + 1) & (2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 10) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1^2 - 10 \cdot x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1 \cdot x_2^2 + x_1 - 10 \cdot x_2 + 8 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

2. Yol: Aynı Denklem sistemi Fixed-Point Iterasyon metodu ile de çözülebilir. Bu durumda x_1 ve x_2 değişkenleri için denklemler tekrar yazılmalıdır.

$$x_1^2 - 10 \cdot x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10} \qquad (32)$$

$$x_1 \cdot x_2^2 + x_1 - 10 \cdot x_2 + 8 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{x_1 \cdot x_2^2 + x_1 + 8}{10} \qquad (33)$$

Denklem (32) ve (33) in ard arda uygulanmasıyla kök değerine gidilir. İşlemler tamamlandığında cevabın;

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ olduğu görülür.

İterasyon sayısı	x_1^i	x_1^{i+1}	x_2^i	x_2^{i+1}
1.	0.50000000	0.64000000	2.50000000	0.85200000
2.	0.64000000	0.97937314	0.85200000	0.98335551
3.	0.97937314	0.99987643	0.98335551	0.99985195
4.	0.99987643	0.99999999	0.99985195	0.99999999
5.	0.99999999	1.00000000	0.99999999	1.00000000
6.	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Zekeriya Girgin

7.	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Farklı başlangıç değerleri girildiğinde, farklı kökler elde edilmektedir.

4. Eğri Uydurma (Curve Fitting):

Basit istatistik ile ilgili bazı temel formüller aşağıdaki gibi tanımlıdır. yani x, y Kartezyen koordinat sisteminde verilen veriler için aritmetik ortalama ve ortalama değer civarında **Standart sapma değerleri** (**S_y**);

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \tag{34}$$

$$S_{tx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

$$S_y = \sqrt{\frac{S_{ty}}{n-1}} \; , \; S_{ty} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \ldots + (y_n - \bar{y})^2 \tag{35}$$

Buradaki (S_{ty}); hatalar toplamının karesini vermektedir Ayrıca yine istatistikte kullanılan **Değişim katsayısı** (Coefficient of variation=**cv**) aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$cv = \frac{S_y}{\bar{y}} \cdot 100\%$$

Bazı temel Mühendislikte elimizde bulunan verileri amprik bir formüle dönüştürerek vermek daha uygun olduğundan Eğri uydurma öenmli konular arasında yer almaktadır. İlk olarak eğri uydurmak yerine *doğru uydurma* verilecektir.

4.1 Lineer Düzeltme (Linear Regression):

Doğru uydurmada en basit misal, en küçük kareler metodu verilebilir. Gözlemleme olarak verilen noktalar: (x1, y1), (x2, y2),..., (xn, yn). şeklinde olduğunda doğru denklemi için matematiksel ifade, hatası ile birlikte:

$$e_i + y_{i,measured} = \underbrace{(a_0 + a_1 x_i)}_{model} \tag{36}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada a_0 ve a_1 katsayıları sırasıyla y fonksiyonunun başlangıç ve eğimini vermektedir. e_i ise , i. verideki hata miktarıdır. Yukarıdaki denklem tekrar düzenlendiğinde

$$e_i = a_0 + a_1 x_i - y_i \tag{37}$$

elde edilir. Hatalar toplandığında, negatif ve pozitif olan değerler birbirini götüreceğinden, hataların karesi alınarak bu durumdan kurtulunmuş olur. Onun için "En iyi sağlama Kriteri" uygundur. Bunun izahı için, n adet veri kullanılarak, en iyi doğruyu sağlama kriteri aşağıdaki formülle verilmiştir.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) \tag{38}$$

Diğer bir mantıksal kriter mutlak değer yazılarak verilmiştir. yani;

$$\sum_{i=1}^{n}\left|e_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|a_0 + a_1 x_i - y_i\right| \tag{39}$$

Her iki durumda da karşılaşılan engelleri aşmak için aşağıda verilen formül kullanılmaktadır.

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_{i,\text{model}} - y_{i,\text{measured}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)^2 \tag{40}$$

Böylece a_0 ve a_1 katsayılarından sadece bir tane doğru denklemi elde edilir ve bu doğru denklemi, verileri en iyi sağlayan, doğru denklemidir. Onun için bu katsayıların nasıl hesaplandığı, aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)\cdot(+1) = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)\cdot(x_i) = 0 \tag{42}$$

Bu ifadelerin türevleri sıfıra eşitlendiğinden, katsayılar en iyi şekilde hesaplanır.

$$\sum_{i=1}^{n} \cancel{2}\cdot\left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)\cdot(+1) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1\cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cancel{2}\cdot\left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)\cdot(x_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_0\cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1\cdot x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i = 0$$

Bu iki denklem tekrar düzenlendiğinde,

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot y_i\right)$$

Yukarıdaki denklemde, $\sum_{i=1}^{n} a_0 = n\cdot a_0$, olduğu göz önüne alındığında;

$$n\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{43}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot y_i\right) \tag{44}$$

Bu iki denklem normal denklem olarak adlandırılır ve birlikte çözüldüğünde;

$$a_1 = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{45}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - a_1\cdot\bar{x} \tag{46}$$

Zekeriya Girgin

katsayılar hesaplanmış olur. Aynı işlem basamakları diğer farklı denklem katsayılarının hesaplanmasında da kullanılır. Bu problem işlem basamaklarını ayrıntılı vermek için kullanılmıştır.

4.1.1 Misal

Aşağıdaki tabloda verilen x_i ve y_i değerleri için en küçük kareler metodunu kullanarak doğru denklemini $(y = a_0 + a_1 x)$ hesaplayınız

point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Toplam
x_i	0	2	4	6	9	11	12	15	17	19	95
y_i	5	6	7	6	9	8	7	10	12	12	82
x_i^2	0	4	16	36	81	121	144	225	289	361	1277
$(x_i \cdot y_i)$	0	12	28	36	81	88	84	150	204	228	911

Çözüm: 1.yol: Denklem (43) ve (44) esas alındığında, yukarıdaki tablo kullanılarak;

$$n\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \rightarrow 10\cdot a_0 + 95\cdot a_1 = 82 \rightarrow 9.5\cdot(10\cdot a_0 + 95\cdot a_1) = 9.5\cdot(82)$$

$$-95\cdot a_0 - 902.5\cdot a_1 = -779$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i) \rightarrow \quad 95\cdot a_0 + 1277\cdot a_1 = 911$$

Elde edilen iki denklem toplandığında;

$$\begin{matrix} -95\cdot a_0 - 902.5\cdot a_1 = -779 \\ 95\cdot a_0 + 1277\cdot a_1 = 911 \end{matrix} \rightarrow (1277 - 902.5)\cdot a_1 = (911 - 779) \quad 374.5\cdot a_1 = 132 \rightarrow a_1 = \frac{132}{374.5}$$

$\boxed{a_1 = 0.352469959946595}$ olarak hesaplanır. Diğeri için;

$10\cdot a_0 + 95\cdot a_1 = 82 \rightarrow 10\cdot a_0 + 95\cdot\frac{132}{374.5} = 82 \rightarrow \boxed{a_0 = 4.85153538050734}$ olarak bulunur.

2. yol: Denklem (45) ve (46) kullanıldığında hesaplanabileceğinden dolayı, ilk önce ortalama değerler hesaplanabilir.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{0+2+4+6+9+11+12+15+17+19}{10} = \frac{95}{10} = 9.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{5+6+7+6+9+8+7+10+12+12}{10} = \frac{82}{10} = 8.2$$

$$S_{ty} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \begin{cases}(5-8.2)^2 + (6-8.2)^2 + (7-8.2)^2 + (6-8.2)^2 + (9-8.2)^2 + \\ (8-8.2)^2 + (7-8.2)^2 + (10-8.2)^2 + (12-8.2)^2 + (12-8.2)^2 \end{cases} = 7.105427357601\text{e-}15$$

Buradan *Standart Sapma değeri* S_y;

Zekeriya Girgin

$S_y = \sqrt{\dfrac{S_{ty}}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{7.105427357601e\text{-}15}{10-1}} \rightarrow \boxed{S_y = 2.80979e\text{-}08}$ şeklinde elde edilir.

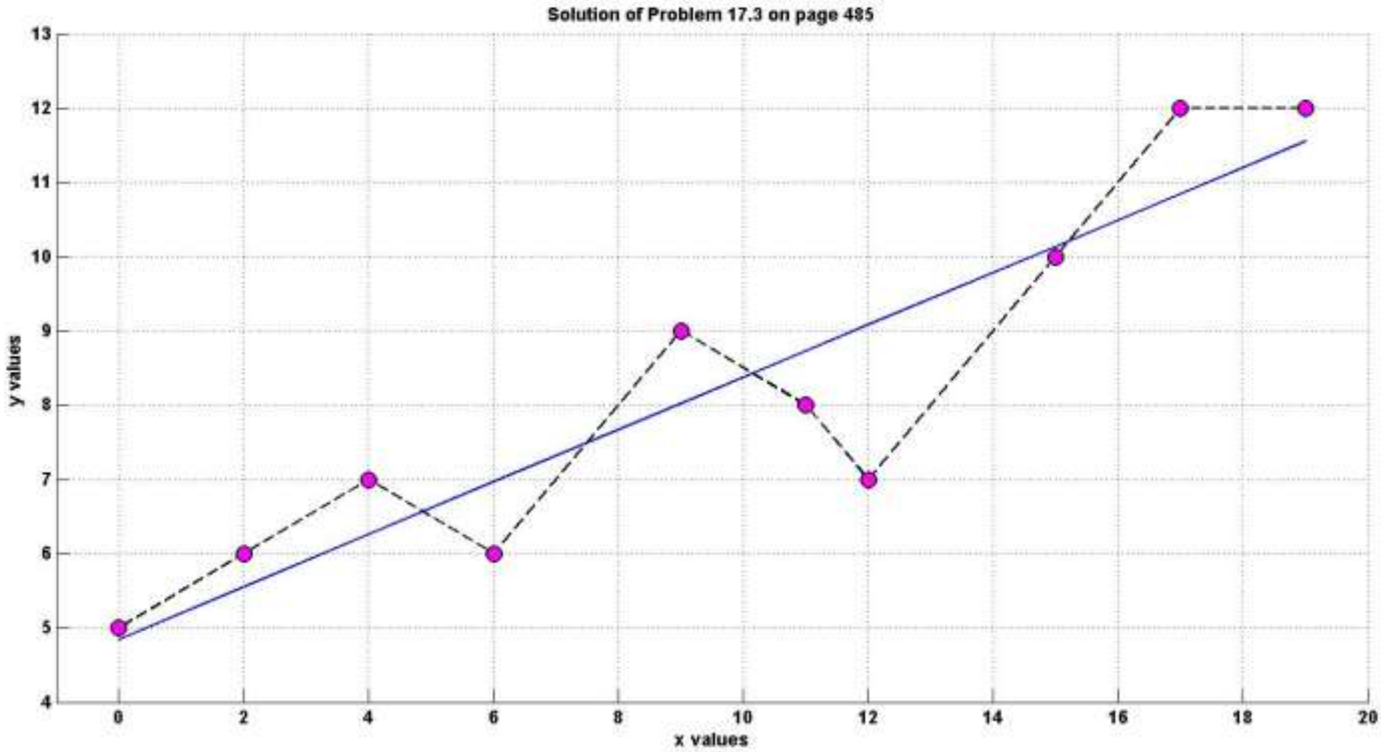
$$a_1 = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = 0.352469959946595$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x} = 8.2 - (0.352469959946595) \cdot 9.2 = 4.85153538050734$$

$$y = a_0 + a_1 x \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 4.85153538050734 + 0.352469959946595 \cdot x}$$

$$n \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \rightarrow 10 \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

şeklinde doğru denklemi hesaplanmış olur



Sayısal veriler noktalar halinde ve denklem sonucu elde edilen doğru mavi çizgi halinde grafikle verilmiştir.

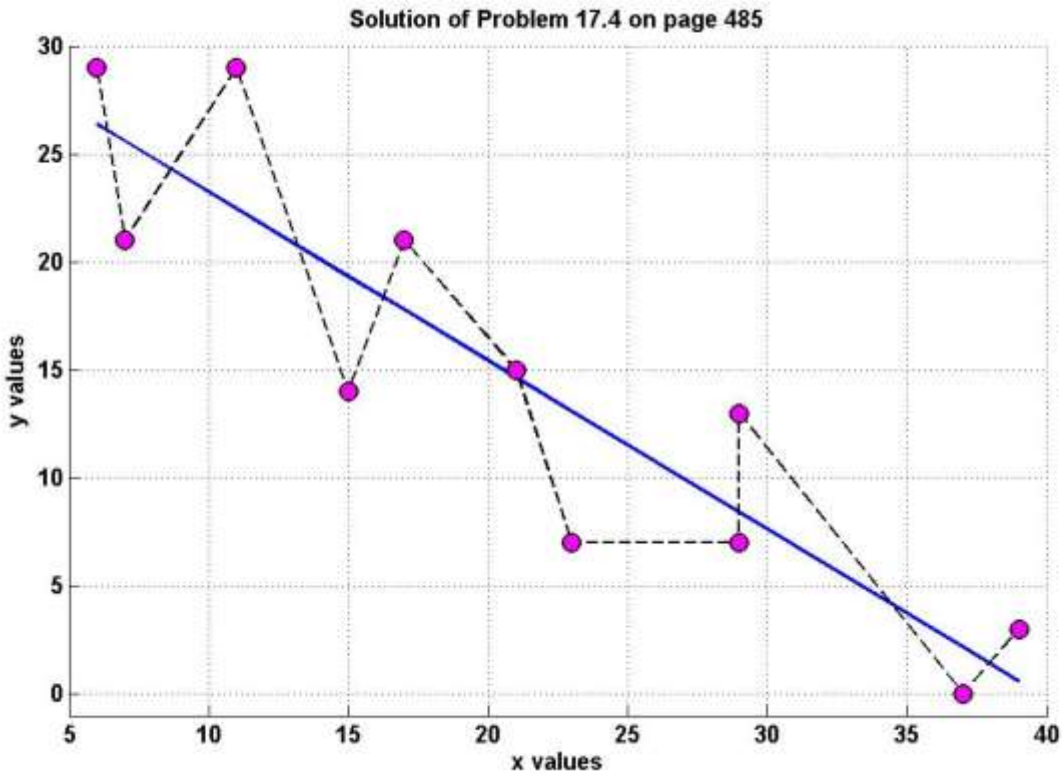
4.1.2 Misal

Aşağıdaki tabloda verilen x_i ve y_i değerleri için en küçük kareler metodunu kullanarak doğru denklemini $(y = a_0 + a_1 x)$ hesaplayınız

Values	x	y	x^2	x*y
1	6	29	36	174
2	7	21	49	147
3	11	29	121	319
4	15	14	225	210
5	17	21	289	357
6	21	15	441	315

7	23	7	529	161
8	29	7	841	203
9	29	13	841	377
10	37	0	1369	0
11	39	3	1521	117
Toplam	234	159	6262	2380

Çözüm: ilk önce ortalama değerler hesaplanabilir.



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{11} = \frac{234}{11} = 21.2727$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{11} y_i}{11} == \frac{159}{11} = 14.4545$$

$$n \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \rightarrow \quad 11 \cdot a_0 + 234 \cdot a_1 = 159$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \cdot a_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \quad \rightarrow \quad 234 \cdot a_0 + 6262 \cdot a_1 = 2380$$

$$y = a_0 + a_1 x \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 31.058898485063 - 0.780546509981594 \cdot x}$$

4.2 Lineer Olmayan Eğri Uydurma

Bir önceki bölümde n adet veriyi kullanarak, en iyi doğruyu sağlama kriteri aşağıdaki formülle verilmişti. Bu bölümde, buna terim ilave ederek, genel halde nasıl bir eğri uydurulacağı verilecektir.

$$e_i + y_{i,measured} = \underbrace{\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right)}_{model} \rightarrow e_i^2 = \left[\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right) - y_{i,measured}\right]^2 \qquad (47)$$

Burada hata paylarının karesinin topmanının minimum olması, yazılan fonksiyondaki katsayıların en iyi verileri sağlayan fonksiyon anlamına gelir ve aşağıda gösterilmiştir.

$$S_r = \sum_{i=}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2 \qquad (48)$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i,model} - y_{i,measured}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2 \qquad (49)$$

Böylece a_0, a_1 ve a_2 katsayılarından sadece bir tane denklemi elde edilir ve bu denklem, verileri en iyi sağlayan, eğridir. Onun için bu katsayıların nasıl hesaplandığı aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot (+1) = 0 \qquad (50)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot (x_i) = 0 \qquad (51)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot (x_i^2) = 0 \qquad (52)$$

Bu ifadelerin türevleri sıfıra eşitlendiğinden, katsayılar en iyi şekilde hesaplanır.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_0\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a_2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i) \qquad (53)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) \cdot a_2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot x_i) \qquad (54)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) \cdot a_2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot x_i^2) \qquad (55)$$

Burada $\sum_{i=1}^{n} a_0 = n \cdot a_0$, olduğu göz önüne alındığında Denklem (53);

$$(n) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a_2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i) \qquad (56)$$

haline gelir. Denklem (56), (54) ve (55) matris şeklinde yazıldığında;

Zekeriya Girgin

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 \cdot y_i) \end{Bmatrix} \qquad (57)$$

denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi denklem lineer veya eğrisel olsa da hesaplama tarzı (usulü) değişmemektedir.

4.2.1 Misal

Aşağıdaki tabloda verilen x ve y değerleri için en küçük kareler metodunu kullanarak $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ denkleminin katsayılarını hesaplayınız.

Çözüm: Yukarıda verilen Denklem (57) kullanılarak hesaplamalar yapılabilir.

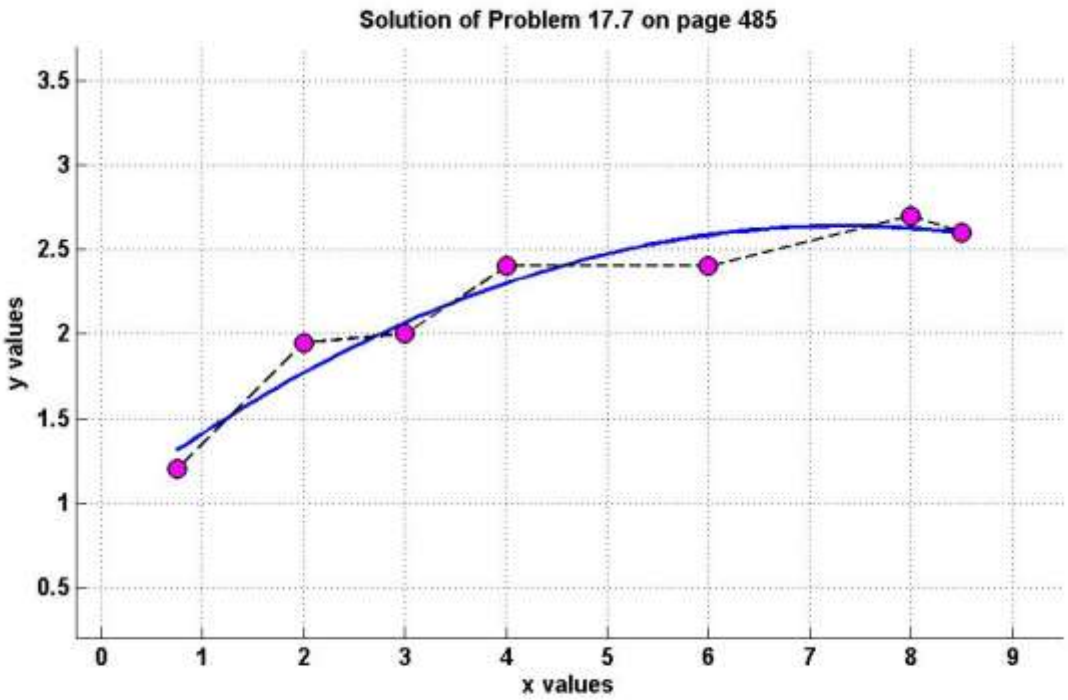
$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 \cdot y_i) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 32.25 & 201.813 \\ 32.25 & 201.813 & 1441.55 \\ 201.813 & 1441.55 & 10965.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.25 \\ 78.5 \\ 511.925 \end{Bmatrix}$$

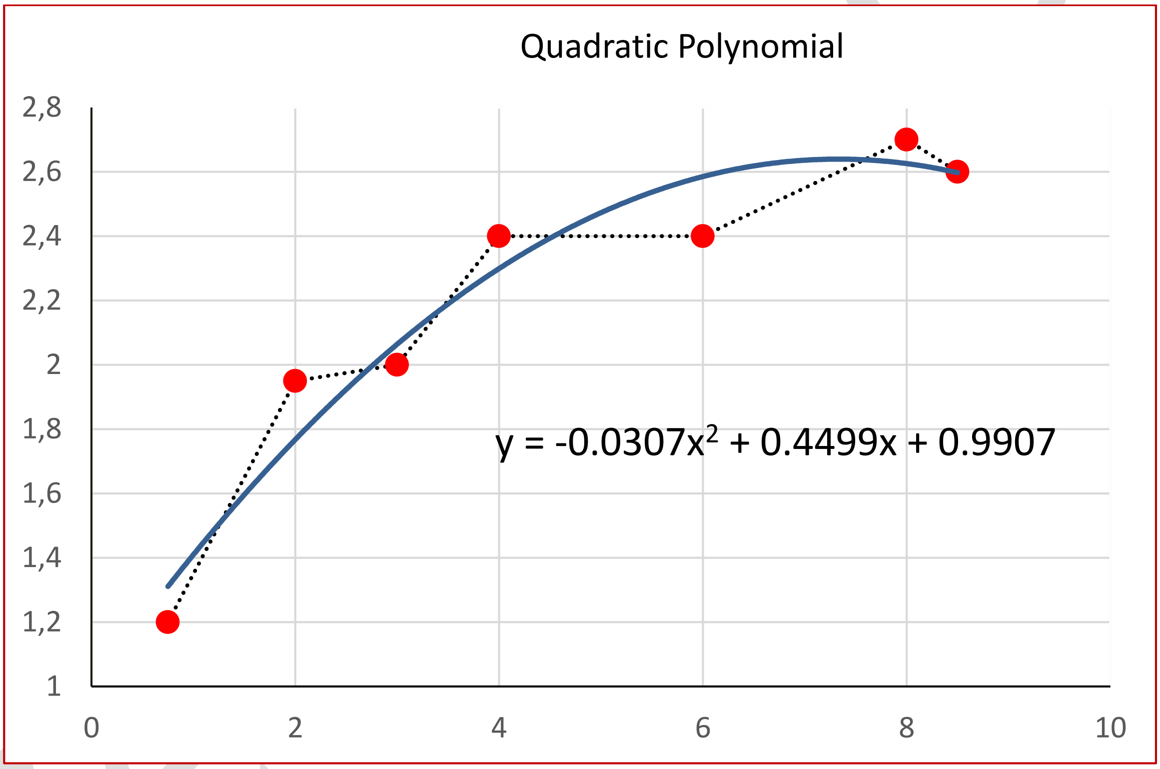
$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 32.25 & 201.813 \\ 32.25 & 201.813 & 1441.55 \\ 201.813 & 1441.55 & 10965.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 15.25 \\ 78.5 \\ 511.925 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.990728356411965 \\ 0.449900617012457 \\ -0.0306938043656141 \end{Bmatrix}$$

Values	x	y	x^2	x^3	x^4	x*y	x^2*y
1	0.75	1.2	0.5625	0.42188	0.31641	0.9	0.675
2	2	1.95	4	8	16	3.9	7.8
3	3	2	9	27	81	6	18
4	4	2.4	16	64	256	9.6	38.4
5	6	2.4	36	216	1296	14.4	86.4
6	8	2.7	64	512	4096	21.6	172.8
7	8.5	2.6	72.25	614.125	5220.06	22.1	187.85
Toplam	32.25	15.25	201.813	1441.55	10965.4	78.5	511.925

Aynı problemin Excel ile çözülen grafiği de aşağıda verilmiştir. Sonuçların aynı çıktığı görülmektedir.

Ziya Girgin





Cevap: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ → $\boxed{y = 0.99073 + 0.4499 \cdot x - 0.030694 \cdot x^2}$ olarak hesaplanır. Grafiği aşağıdadır.

4.2.2 Misal

Aşağıdaki tablo değerlerini kullanarak $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ denklemini sağlayan katsayıları hesaplayınız.

x	3	4	5	7	8	9	11	12
y	1.6	3.6	4.4	3.4	2.2	2.8	3.8	4.6

Çözüm: işlem basamakları yine aynıdır.

$$e_i + y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 \rightarrow e_i^2 = \left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)^2$$

$$S_r = \sum_{i=}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)^2$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_{i,measured} - y_{i,model}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)^2$$

Böylece a_0, a_1, a_2 ve a_3 katsayılarından sadece bir tane eğri denklemi elde edilir ve bu eğri denklemi verileri en iyi sağlayandır. Onun için bu katsayıların nasıl hesaplandığı aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)\cdot(+1) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)\cdot(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)\cdot(x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_3} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 - y_i\right)\cdot(x_i^3) = 0$$

Bu ifadelerin türevleri sıfıra eşitlendiğinden, katsayılar en iyi şekilde hesaplanır.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_0\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}(y_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot x_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^5\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot x_i^2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^5\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^6\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot x_i^3)$$

Buradan katsayılar hesaplanır veya bu katsayılar denklemleri matris formunda yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^4) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^4) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^5) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^3) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^4) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^5) & \sum_{i=1}^{n}(x_i^6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^3\cdot y_i) \end{Bmatrix}$$

Zekeriya Girgin

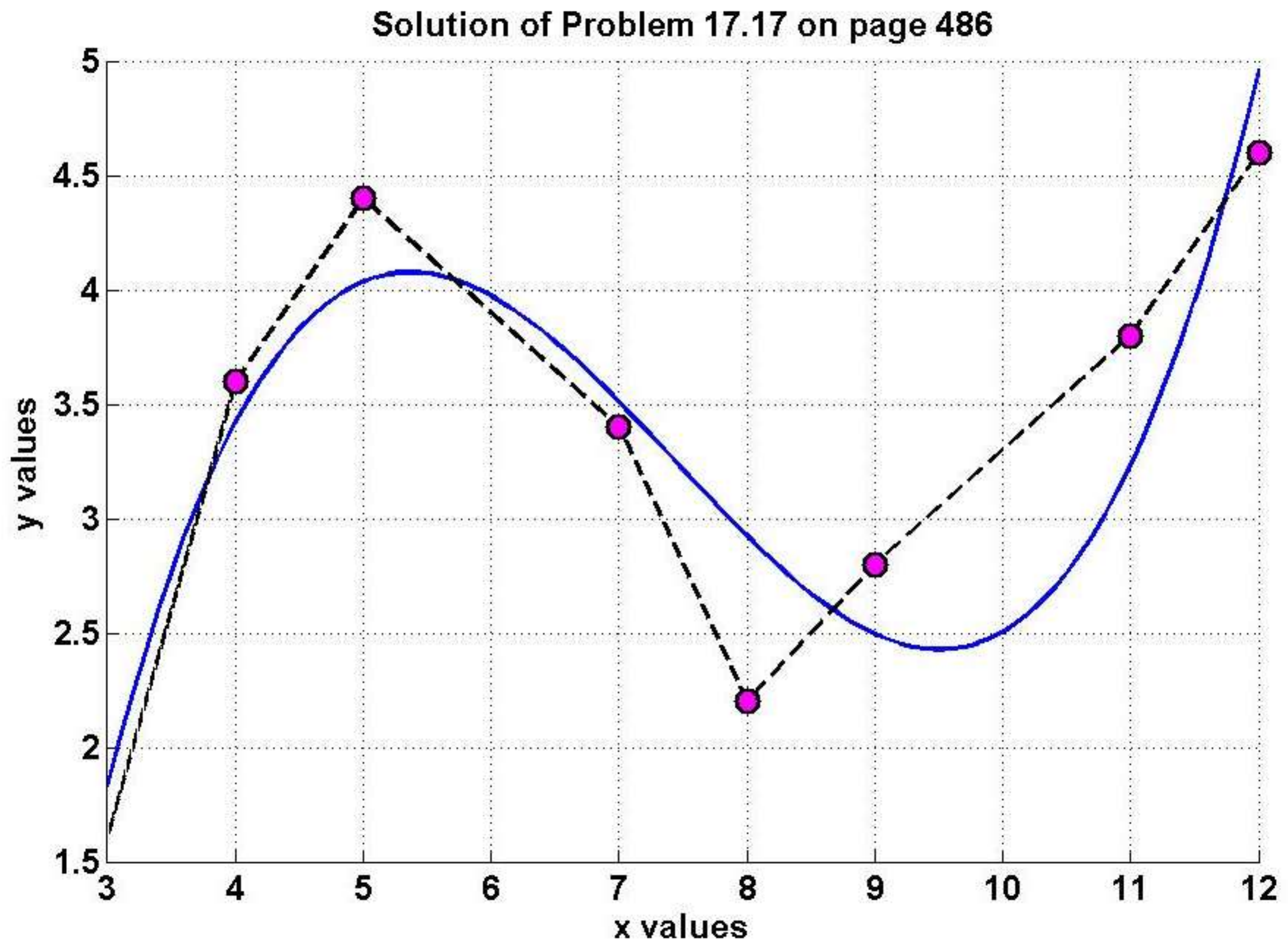
denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi denklem lineer veya eğrisel olsa da hesaplama tarzı (usulü) değişmemektedir. Verilen değerler denklemde yerine yazılıp hesaplandığında eğri denkleminin aşağıdaki gibi olduğu görülür.

Values	x	y	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	y*x	y*x^2	y*x^3
1	3	1.6	9	27	81	243	729	4.8	14.4	43.2
2	4	3.6	16	64	256	1024	4096	14.4	57.6	230.4
3	5	4.4	25	125	625	3125	15625	22	110	550
4	7	3.4	49	343	2401	16807	117649	23.8	166.6	1166.2
5	8	2.2	64	512	4096	32768	262144	17.6	140.8	1126.4
6	9	2.8	81	729	6561	59049	531441	25.2	226.8	2041.2
7	11	3.8	121	1331	14641	161051	1771561	41.8	459.8	5057.8
8	12	4.6	144	1728	20736	248832	2985984	55.2	662.4	7948.8
Toplam	59	26.4	509	4859	49397	522899	5689229	204.8	1838.4	18164

$$\begin{bmatrix} 8 & 59 & 509 & 4859 \\ 59 & 509 & 4859 & 49397 \\ 509 & 4859 & 49397 & 522899 \\ 4859 & 49397 & 522899 & 5689229 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26.4 \\ 204.8 \\ 1838.4 \\ 18164 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.48870718 \\ 7.143817219 \\ -1.041206921 \\ 0.046676016 \end{Bmatrix}$$

Cevap: $\boxed{y = -11.488707179 + 7.143817219 \cdot x - 1.0412069207 \cdot x^2 + 0.0466760165 \cdot x^3}$

Zekeriya



4.2.3 Misal

Aşağıdaki tablo değerlerini kullanarak $y = x^a \cdot e^{b \cdot x}$ denklemini sağlayan katsayıları hesaplayınız.

Values	x	y	ln(x)*ln(x)	x*ln(x)	x^2	ln(x)*ln(y)	x*ln(y)
1	0.1	0.03	5.30189811	-0.23025851	0.01	8.074147942	-0.3506558
2	0.4	0.31	0.83958871	-0.36651629	0.16	1.073144111	-0.4684732
3	0.7	0.83	0.12721702	-0.24967246	0.49	0.066459092	-0.1304307
4	1	1.65	0	0	1	0	0.50077529
5	1.3	2.84	0.06883501	0.341073544	1.69	0.273856882	1.35694527
6	1.6	4.5	0.22090341	0.752005807	2.56	0.706921835	2.40652383
7	1.9	6.77	0.41197641	1.219522384	3.61	1.227546255	3.63375207
8	2.2	9.8	0.62166501	1.734606193	4.84	1.799561191	5.02124125
9	2.5	13.8	0.83958871	2.29072683	6.25	2.404959505	6.56167148
10	2.8	19	1.06011614	2.882934368	7.84	3.031651546	8.24442914
Toplam	14.5	59.53	9.49178852	8.374421862	28.45	18.65824836	26.7757786

Çözüm: $y = x^a \cdot e^{b \cdot x}$

denkleminde görüldüğü gibi a ve b katsayıları üsteldir ve önce bunların bir denklemin katsayıları haline getirilmesi gerekir. Bunun için denklemde her iki tarafın tabii logaritması alındığında,

$$\ln(y) = \ln(x^a) + \ln(e^{b \cdot x}) \quad \rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x) \cdot a + b \cdot x$$

$$e_i+\ln(y_i)=\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b \quad \rightarrow \quad e_i=\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)$$

$$e_i^2=\left(\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)\right)^2$$

$$S_r=\sum_{i=}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)\right)^2$$

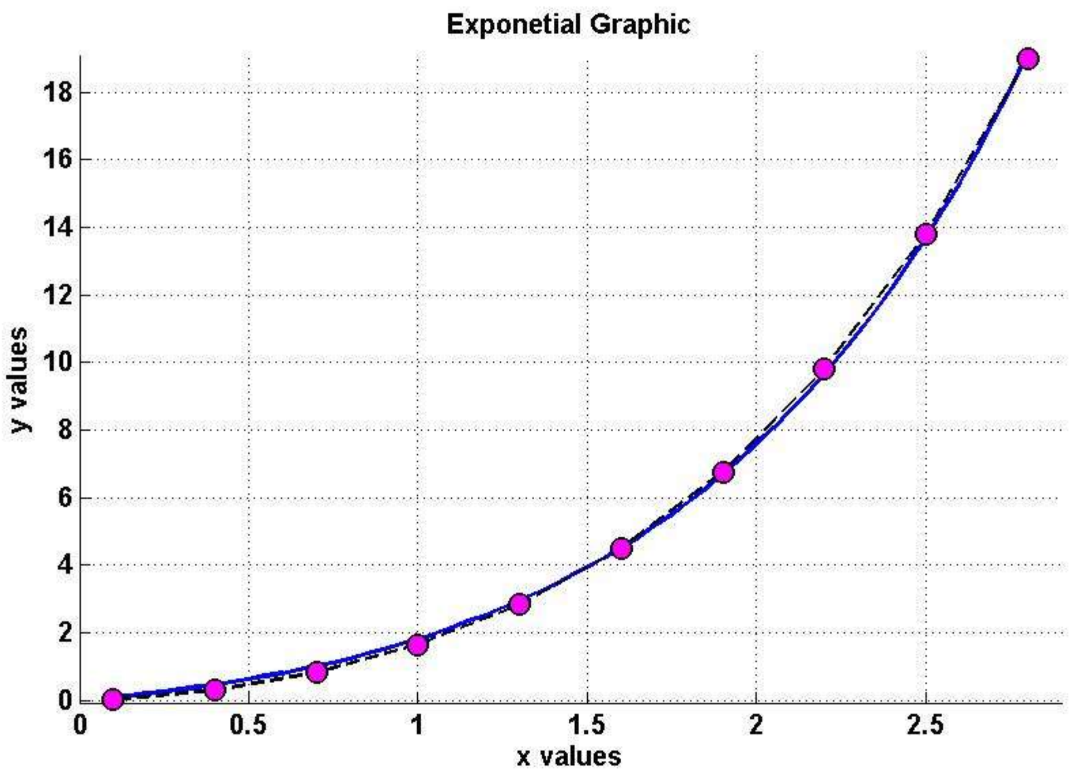
$$S_r=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i,model}-y_{i,measured}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)\right)^2$$

Böylece a ve b katsayılarından sadece bir tane eğri denklemi elde edilir ve bu eğri denklemi verileri en iyi sağlayandır. Onun için bu katsayılara göre denklemin türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}\cdot\left(\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)\right)\cdot\ln(x_i)=0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}\cdot\left(\ln(x_i)\cdot a+x_i\cdot b-\ln(y_i)\right)\cdot x_i=0$$

Bu ifadelerin türevleri sıfıra eşitlendiğinden, katsayılar en iyi şekilde hesaplanır.



$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\cdot\ln(x_i)\right]\right)\cdot a+\left(\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(x_i)\right]\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\cdot\ln(y_i)\right] \tag{58}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(x_i)\right]\right)\cdot a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(y_i)\right] \tag{59}$$

Buradan katsayılar hesaplanır veya bu katsayılar denklemleri matris şeklinde de yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\cdot\ln(x_i)\right] & \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(x_i)\right] \\ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(x_i)\right] & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\cdot\ln(y_i)\right] \\ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot\ln(y_i)\right] \end{Bmatrix} \qquad (60)$$

Buradan sonra eğer sayısal veriler olursa, Denklem (58) ve (59) yerine yazıldığında a ve b katsayıları hesaplanır. Bunun yerine Denklem (60) ile de aynı sonuçlar hesaplanabilir.

$$\begin{bmatrix} 9.491789 & 8.374422 \\ 8.374422 & 28.45 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 18.65825 \\ 26.77578 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.50177700483324 \\ 0.499354716931047 \end{Bmatrix}$$ şeklinde hesaplanır.

$$y=x^a\cdot e^{b\cdot x} \rightarrow y=x^{1.53366426}\cdot e^{b\cdot x}$$

4.2.4 Misal

Aşağıda verilen tablo değerlerini kullanarak, $y=a\cdot x\cdot e^{b\cdot x}$ denklemini elde edecek katsayıları hesaplayınız.

Values	x	y	x^2	ln(y)-ln(x)	(ln(y)-ln(x))*x
1	0.2	0.22	0.04	0.09531018	0.019062036
2	0.4	0.5	0.16	0.223143551	0.089257421
3	0.6	0.8	0.36	0.287682072	0.172609243
4	0.8	1.19	0.64	0.397096858	0.317677487
5	1	1.65	1	0.500775288	0.500775288
6	1.2	2.18	1.44	0.59700332	0.716403984
7	1.4	2.82	1.96	0.700264648	0.980370508
8	1.6	3.5	2.56	0.782759339	1.252414943
Toplam	7.2	12.86	8.16	3.584035258	4.048570909

$$y=a\cdot x\cdot e^{b\cdot x} \qquad (61)$$

Denklem (61) deki b katsayısı en küçük kareler metoduna uygun değildir. Çünkü bütün katsayılar sade olmalıdır. Normal işlemler yapıldığı takdirde, katsayılar hesaplanamaz.

Doğrudan işlem yapılamadığı aşağıda gösterilmiştir.

$$S_r=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot x_i\cdot e^{b\cdot x_i}-y_i\right)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot x_i\cdot e^{b\cdot x_i}-y_i\right)\cdot\left(x_i\cdot e^{b\cdot x_i}\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial b}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot x_i\cdot e^{b\cdot x_i}-y_i\right)\cdot\left(a\cdot x_i^2\cdot e^{b\cdot x_i}\right)$$

Bu işlemlerle a ve b katsayılarının bulunamayacağı aşikârdır (apaçık görülmektedir.). Bunun yerine Denklem (61) nin tabii logaritması alınır.

$$y=a\cdot x\cdot e^{b\cdot x} \rightarrow \ln(y)=\ln(a)+\ln(x)+\ln\left(e^{b\cdot x}\right) \rightarrow \ln(y)=\ln(a)+\ln(x)+x\cdot b \qquad (62)$$

Burada görüldüğü gibi, sadece a katsayısı sade vaziyette değildir. Bunun yerine; $c=\ln(a)$ alındığında denklem;

$\ln(y) = c + \ln(x) + x \cdot b$ haline gelir. Buradan c hesaplandığında, a katsayısını bulmak için; $e^c = e^{\ln(a)}$ → $a = e^c$ denkleminden yararlanılır.

$$e_i + \ln(y_i) = c + \ln(x_i) + x_i \cdot b \;\rightarrow\; e_i = c + \ln(x_i) + x_i \cdot b - \ln(y_i) \qquad (63)$$

Denklem (63) daki hata bir veri içindir. Tüm verilerin hatalarının karesinin toplamını bulmak için;

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(c + \ln(x_i) + x_i \cdot b - \ln(y_i)\right)^2 \qquad (64)$$

yazılmalıdır. Burada katsayı c ve b ye göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde iki denklem elde edilir ve bu iki denklemin ortak çözümünden c ve b katsayıları hesaplanır.

$$\frac{\partial S_r}{\partial c} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(c + \ln(x_i) + x_i \cdot b - \ln(y_i)\right) \cdot 1 = 0 \qquad (65)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(c + \ln(x_i) + x_i \cdot b - \ln(y_i)\right) \cdot x_i = 0 \qquad (66)$$

Denklem (65) ve (66) nin sadeleştirilmesiyle;

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c + \ln(x_i) + x_i \cdot b\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c + \ln(x_i) + x_i \cdot b\right) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) \cdot x_i$$

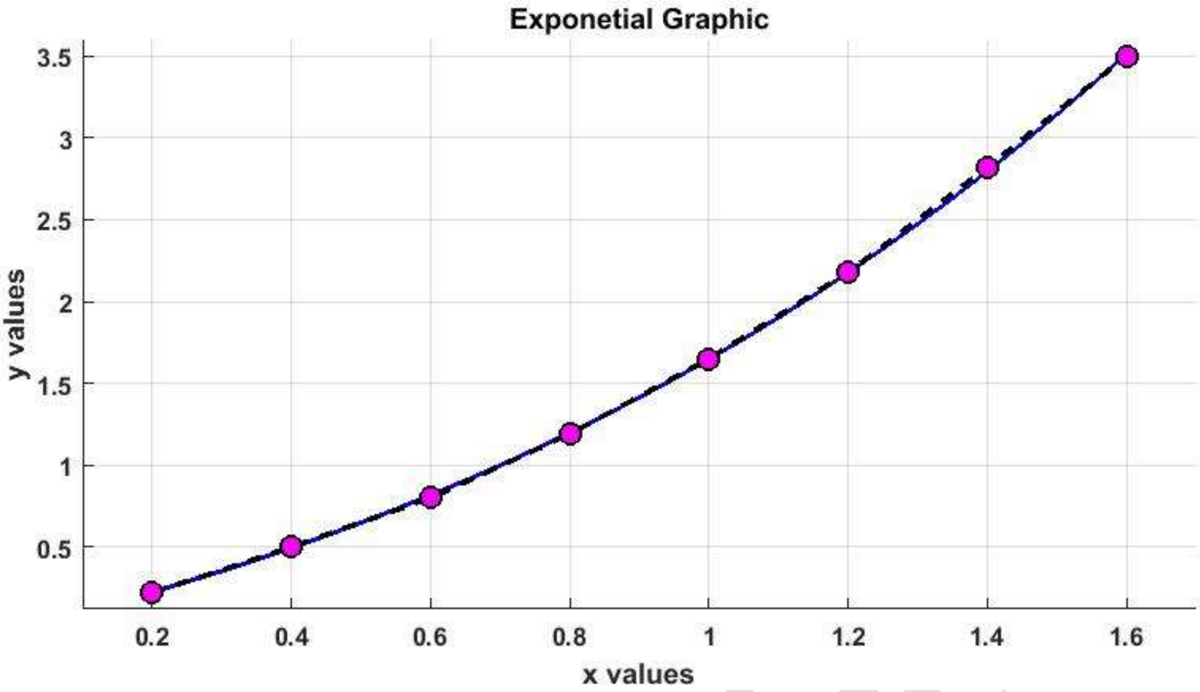
yazılır. Bu denklemlerde c ve b katsayı olacak şekilde yazılmalıdır.

$$\begin{bmatrix} n & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) \cdot x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot x_i\right) \end{Bmatrix}$$

Buradan görüldüğü gibi asıl kullanılacak denklemler yukarıda verilen iki denklemdir. Bu denklemler ile ilgili doldurulması gereken tablo aşağıda verilmiştir.

Bu değerlerin yerine yazılmasıyla c ve b katsayıları hesaplanır.

Zekeriya Girgin



$8 \cdot c + 7.2 \cdot b = 1.3131 + 2.2709 \rightarrow 8 \cdot c + 7.2 \cdot b = 3.584$ 0.007107142641

$7.2 \cdot c + 8.16 \cdot b = 4.317 - 0.26844 \rightarrow 7.2 \cdot c + 8.16 \cdot b = 4.0486$

$c = 0.007107142641$, $a = 1.01982357614521$ ve $b = 0.479917477135958$

olarak bulunur. Hesaplamalarda yuvarlatma olduğundan biraz farklılıklar vardır. Eğer katsayılar hiç ihmal edilmeden yazılsaydı, verilen cevabın aynısı bulunurdu. İmtihanlarda sizlerden sadece virgülden sonra 3 basamak yazarak cevapları bulmanız istenecektir.

4.2.5 Misal

$y = \left(\dfrac{a + \sqrt{x}}{b \cdot \sqrt{x}} \right)^2$ eşitliğine, en küçük kareler metodu ile eğri uydurmak için, ilk önce a ve b katsayılarını lineer hale getirecek dönüşümü yapıp, daha sonra aşağıdaki x ve y verilerini kullanarak x=1.6 için y değerini hesaplayınız.

Values	x	y	1/x	1/sqrt(x)	Sqrt(y)	Sqrt(y/x)
1	0.5	10.4	2	1.414213562	3.224903099	4.5607017
2	1	5.8	1	1	2.408318916	2.408318916
3	2	3.3	0.5	0.707106781	1.816590212	1.284523258
4	2.5	2.8	0.4	0.632455532	1.673320053	1.058300524
5	3	2.4	0.33333333	0.577350269	1.549193338	0.894427191
6	3.5	2.2	0.28571429	0.534522484	1.483239697	0.792824967
7	4	2	0.25	0.5	1.414213562	0.707106781
8	5	1.7	0.2	0.447213595	1.303840481	0.583095189
Toplam	21.5	30.6	4.96904762	5.812862224	14.87361936	12.28929853

Çözüm: Verilen denklem en küçük kareler usulüne uygun değildir. Çünkü bütün katsayılar sade (lineer denklem katsayıları şeklinde) olmalıdır. Bunun için her iki tarafın kare kökü alındığında;

$$y=\left(\frac{a+\sqrt{x}}{b\cdot\sqrt{x}}\right)^2 \rightarrow \sqrt{y}=\frac{a+\sqrt{x}}{b\cdot\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{y}=\frac{a}{b\cdot\sqrt{x}}+\frac{1}{b} \rightarrow \sqrt{y_i}=f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c, \quad \left(f=\frac{1}{b},\ c=\frac{a}{b}\right)$$

$$e_i+\sqrt{y_i}=f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c \qquad \rightarrow \qquad e_i=\left(f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c-\sqrt{y_i}\right) \tag{67}$$

Denklem (67); en küçük kareler metoduna uygundur.

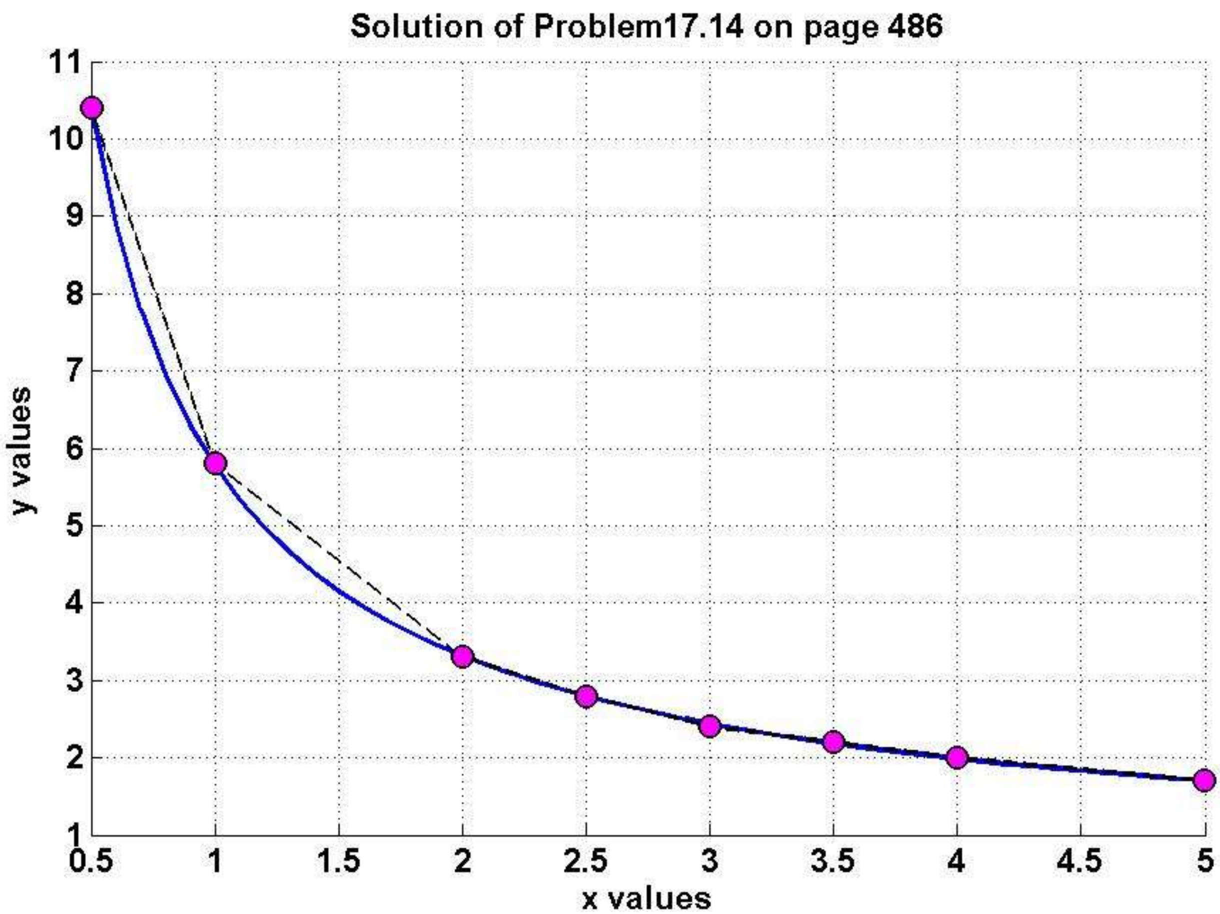
$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = S_r = \sum_{i=1}^{n}\left(f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c-\sqrt{y_i}\right)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial c}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}\cdot\left(f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c-\sqrt{y_i}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}}=0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial f}=\cancel{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f+\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cdot c-\sqrt{y_i}\right)\cdot 1=0$$

Bu işlemlerle c ve f katsayıları bulunabilir.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)\cdot f+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\cdot c-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt{x_i}}\right)=0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} f+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)\cdot c-\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{y_i}\right)=0$$



Bu iki denklemin tekrar düzenlenmesiyle,

$$\begin{bmatrix} n & \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right) & \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f \\ c \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{y_i}\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt{x_i}}\right) \end{Bmatrix} \qquad (68)$$

elde edilir. Denklem (68) vasıtasıyla c ve f katsayıları bulunur.Buradan a ve b katsayılarına geçiş yapılır. Bu denklemler ile ilgili doldurulması gereken tablo aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 8 & 5.812862224 \\ 5.812862224 & 4.96904762 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f \\ c \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 14.87361936 \\ 12.28929853 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} f \\ c \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.414509142 \\ 1.988271144 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} b \\ a \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2.409918626596673 \\ 4.790451257386881 \end{Bmatrix}$$

$y=\left(\frac{4.790451257386881+\sqrt{x}}{2.409918626596673\cdot\sqrt{x}}\right)^2$ ve $y(1.6)=3.945985898183849$ olduğu görülür.

4.2.6 Misal

$y=\frac{\alpha+x^2}{\beta\cdot x}$ eşitliğine, en küçük kareler metodu ile eğri uydurmak için α ve β katsayılarını elde eden denklem sistemini çıkartınız.

Çözüm: $y=\frac{\alpha+x^2}{\beta\cdot x} \rightarrow y=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\beta}\cdot x \rightarrow a=\frac{\alpha}{\beta}$ ve $b=\frac{1}{\beta}$ olarak alındığında;

$$y=a\cdot\frac{1}{x}+b\cdot x \rightarrow e_i+y_i=a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i \rightarrow e_i=a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i-y_i \rightarrow e_i^2=\left(a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i-y_i\right)^2$$

$$S_r=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i-y_i\right)^2 \rightarrow \frac{dS_r}{da}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}\cdot\left(a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i-y_i\right)\cdot\frac{1}{x_i}=0$$

$\frac{dS_r}{db}=\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}\cdot\left(a\cdot\frac{1}{x_i}+b\cdot x_i-y_i\right)\cdot x_i=0$ Bu iki denklemin tekrar düzenlenmesiyle;

$$\begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)\cdot a+\sum_{i=1}^{n}b=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n}a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)\cdot a+n\cdot b=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} \\ n\cdot a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i \end{matrix}}$$

olur. Buradan $\boxed{\beta=\frac{1}{b}}$ bulunur. β değeri, $\boxed{\alpha=a\cdot\beta}$ denkleminde yerine konulduğunda, α değeri de hesaplanmış olur.

Values	x	y	1/x^2	(x^2)	(y*x)	y/x
1	0.5	2.8	4	0.25	1.4	5.6
2	1	1.67	1	1	1.67	1.67
3	2	1.3	0.25	4	2.6	0.65

Zekeriya Girgin

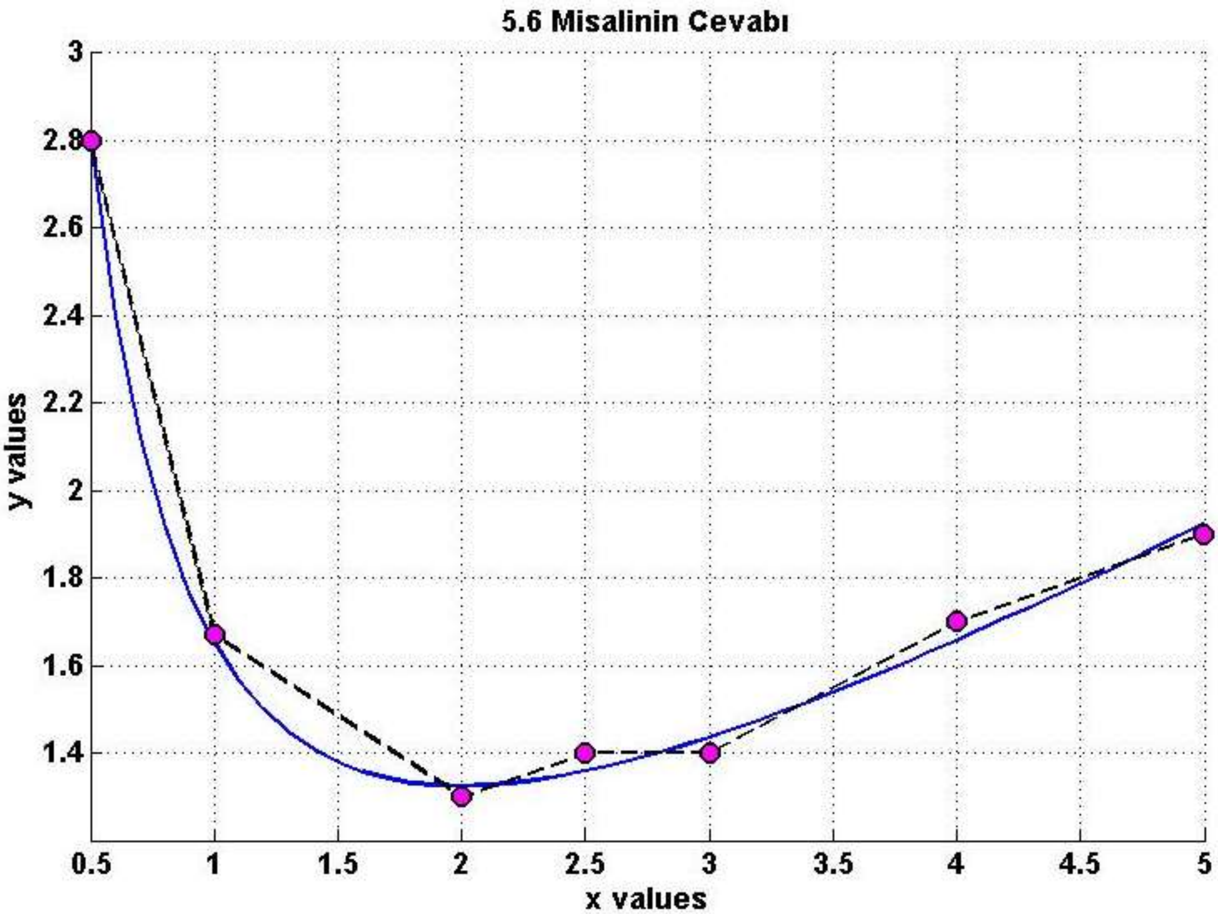
4	2.5	1.4	0.16	6.25	3.5	0.56
5	3	1.4	0.11111111	9	4.2	0.466666667
6	4	1.7	0.0625	16	6.8	0.425
7	5	1.9	0.04	25	9.5	0.38
Toplam	21.5	30.6	5.62361111	61.5	29.67	9.75166666

$5.62361111 \cdot a + 7 \cdot b = 9.751666667$

$7 \cdot a + 61.5 \cdot b = 29.67$

Bu iki denklemin çözümünden a ve b bulunur. $\beta = \frac{1}{b}$ ve $\alpha = a \cdot \beta$ formülleli kullanılarak, α ve β değerleri hesaplanır.

$y = \left(\frac{3.97640755293023 + x^2}{3.01094886654909 \cdot x} \right)$ şeklinde elde edilir.



4.2.7 Misal

$y = a_1 \cdot x + a_2 \cdot e^{2 \cdot x} + a_3 \cdot \sin(3 \cdot x)$ eşitliğine, en küçük kareler metodu ile eğri uydurmak için, a_1 , a_2 ve a_3 katsayılarını elde eden denklem sistemini gösteriniz.

Çözüm: işlem basamakları yine aynıdır.

$$e_i + y_i = a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) \;\rightarrow\; e_i^2 = \left(a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) - y_i\right)^2$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_{i,model} - y_{i,measured}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) - y_i\right)^2$$

Böylece a_1, a_2 ve a_3 katsayılarından sadece bir tane eğri denklemi elde edilir ve bu eğri denklemi verileri en iyi sağlayandır. Onun için bu katsayıların nasıl hesaplandığı aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} \cdot \left(a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) - y_i\right)\cdot(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} \cdot \left(a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) - y_i\right)\cdot\left(e^{2\cdot x_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_3} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} \cdot \left(a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot e^{2\cdot x_i} + a_3 \cdot \sin(3\cdot x_i) - y_i\right)\cdot\left(\sin(3\cdot x_i)\right) = 0$$

Bu ifadelerin türevleri sıfıra eşitlendiğinden, katsayılar en iyi şekilde hesaplanır.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} e^{2\cdot x_i}\cdot x_i\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin(3\cdot x_i)\cdot x_i\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}(y_i \cdot x_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{2\cdot x_i}\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} e^{4\cdot x_i}\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin(3\cdot x_i)\cdot e^{2\cdot x_i}\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i \cdot e^{2\cdot x_i}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sin(3\cdot x_i)\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} e^{2\cdot x_i}\cdot \sin(3\cdot x_i)\right)\cdot a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2(3\cdot x_i)\right)\cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i \cdot \sin(3\cdot x_i)\right)$$

Buradan katsayılar hesaplanır veya bu katsayılar denklemleri matris formunda yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \left(\sum_{i=1}^{n} e^{2\cdot x_i}\cdot x_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} \sin(3\cdot x_i)\cdot x_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{2\cdot x_i}\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} e^{4\cdot x_i}\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} \sin(3\cdot x_i)\cdot e^{2\cdot x_i}\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sin(3\cdot x_i)\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} e^{2\cdot x_i}\cdot \sin(3\cdot x_i)\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2(3\cdot x_i)\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_i \cdot x_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i \cdot e^{2\cdot x_i}\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i \cdot \sin(3\cdot x_i)\right) \end{Bmatrix}$$

Halini alır. Buradan da katsayılar hesaplanır.

4.2.8 Misal

$y = \dfrac{\alpha \cdot x + e^x}{\beta \cdot x}$ eşitliğine, en küçük kareler metodu ile eğri uydurmak için, α ve β katsayılarını hesaplayan denklem sistemini elde ediniz.

Çözüm: $y = \dfrac{\alpha \cdot x + e^x}{\beta \cdot x} \rightarrow y = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{e^x}{x} \rightarrow a = \dfrac{\alpha}{\beta}, b = \dfrac{1}{\beta} \rightarrow y = a + b\cdot\dfrac{e^x}{x}$

$$e_i + y_i = a + b\cdot\frac{e^{x_i}}{x_i} \rightarrow e_i = a + b\cdot\frac{e^{x_i}}{x_i} - y_i \rightarrow S_r = e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a + b\cdot\frac{e^{x_i}}{x_i} - y_i\right)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a}=e_i^2=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left(a+b\cdot\frac{e^{x_i}}{x_i}-y_i\right)\cdot(+1)=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}a+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\right)\cdot b-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial b}=e_i^2=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left(a+b\cdot\frac{e^{x_i}}{x_i}-y_i\right)\cdot\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\right)=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\right)\cdot a+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{2\cdot x_i}}{x_i^2}\right)\cdot b-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\cdot y_i\right)=0$$

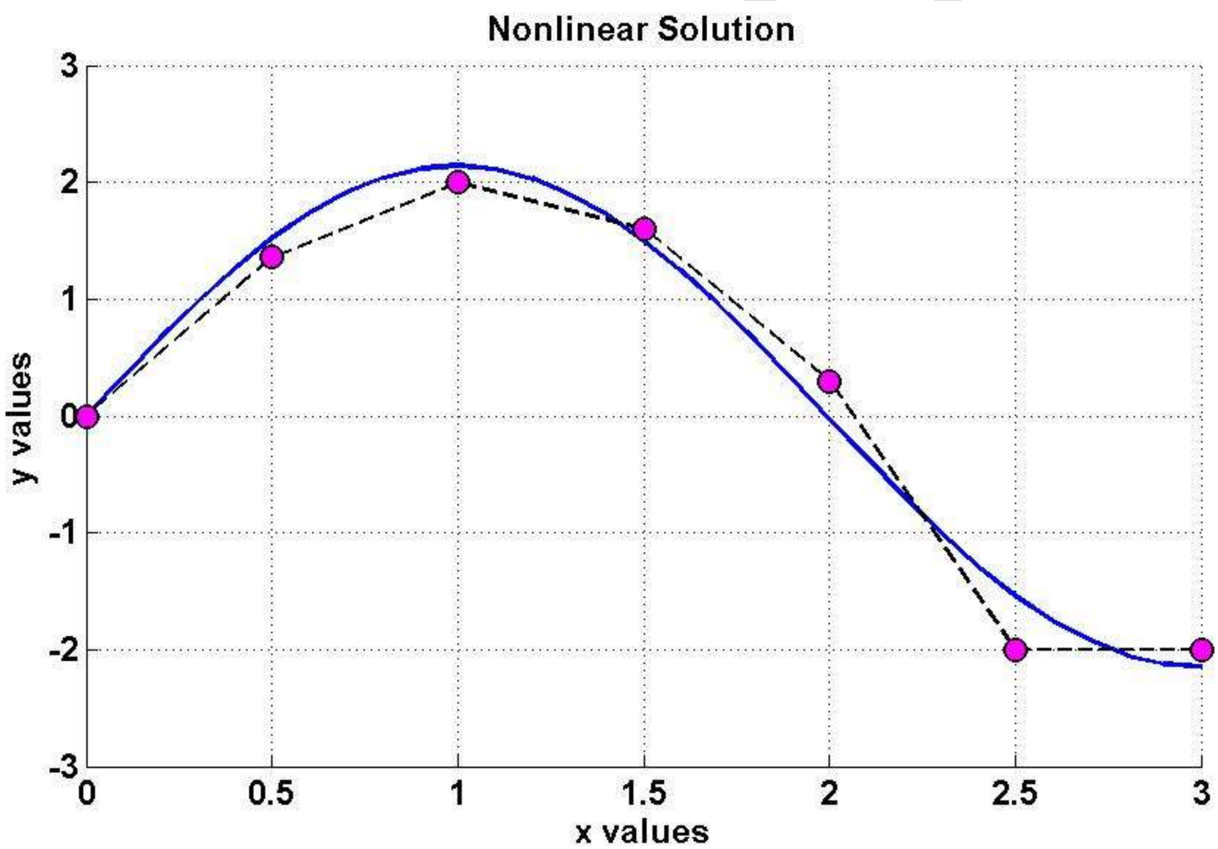
$$n\cdot a+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\right)\cdot a+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{2\cdot x_i}}{x_i^2}\right)\cdot b=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{x_i}}{x_i}\cdot y_i\right)$$ şeklinde elde edilir. Daha sonra $b=\frac{1}{\beta}, a=b\cdot\alpha$ eşitlikleri kullanılarak α ve β katsayıları bulunur.

Aşağıda da bazı özel problemler ve cevapları verilmiştir. Bunların çözümleri farklıdır.

4.2.9 Problem

Aşağıda verilen tablo değerlerini kullanarak, $y=a\cdot\sin(b\cdot x)$ denklemini elde edecek katsayıları hesaplayınız.

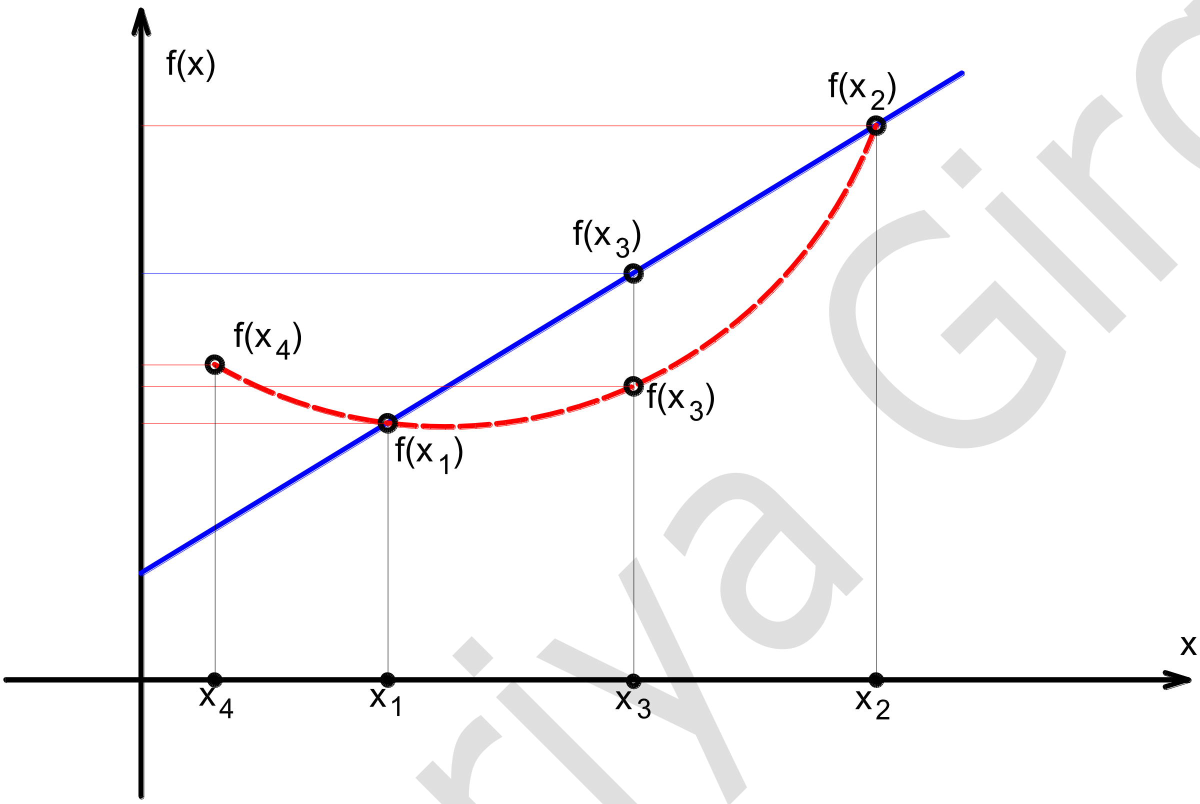


x	0	0.5	1	1.5	2.0	2.5	3.0
y	0	1.36	2	1.6	0.3	-2	-2

Cevap: $\boxed{y=2.14232347283034\cdot\sin(1.57682846796916\cdot x)}$

5. İnterpolasyon (Interpolation)

Aşağıda Şekil 5-1 de gösterildiği gibi, bir f(x) fonksiyonuna (mavi renkte, düz çizgi ile verilen) ait sadece 2 nokta (x_1 ve x_2) noktaları ile fonksiyonun bu noktalardaki değerleri sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ verilmiş olsun. Eğer bilinmeyen x_3 noktası verilip fonksiyonun bu noktadaki yaklaşık değeri bulunmak istendiğinde dört farklı seçenek karşımıza çıkar.



Şekil 5-1: Doğrusal interpolasyon ve eğrisel interpolasyon

5.1 Doğrusal Yaklaşım Usulü (Linear Interpolation Method)

Bunlardan birincisi doğrusal yaklaşım (linear interpolation) dır. Bunun için Şekil 5-1 den aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \tag{69}$$

5.2 Eğrisel Yaklaşım Usulü (Quadratic Interpolation Method)

Bilinen nokta sayısı üç olduğu takdirde, bilinen bu üç noktadan geçen f(x) fonksiyonu için;

$$f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix} \tag{70}$$

Zekeriya Girgin

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix} \tag{71}$$

bağıntıları elde edilir. Buradan f(x) fonsiyonun katsayıları bulunur. bu değerler, $f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2$ denkleminde yerine yazıldığında, istenen x_4 noktasına karşılık gelen $f(x_4)$ değeri hesaplanmış olur.

5.2.1 Misal:

$f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2$ ile verilen fonksiyonda $f(1)=-2$, $f(2)=-1$ ve $f(3)=4$ olduğuna göre; $f(2.5)=?$ için değerini interpolasyon ile hesaplayınız.

Çözüm: $f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$f(x_i)=1-5\cdot x_i+2\cdot x_i^2 \rightarrow f(2.5)=1-5\cdot 2.5+2\cdot 2.5^2 \rightarrow \boxed{f(2.5)=1}$ olarak hesaplanır.

5.3 Kübik Yaklaşım Usulü (Cubic spline Method)

Bilinen nokta sayısı dört olduğu takdirde, bilinen bu dört noktadan geçen f(x) fonksiyonu için;

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3, \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{Bmatrix} \tag{72}$$

Bağıntısı yazılabilir. Kübik fonksiyonun katsayılarını hesaplamak için;

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{Bmatrix} \tag{73}$$

yazılır. Böylece $f(x_i)=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+a_3\cdot x_i^3$ elde edilmiş olur.

5.4 Lagrange interpolasyon polinomu (Lagrange Interpolation polynomials)

Bir $L(x)$ fonksiyonu kabul edelim ve bu fonksiyon, kendi bulunduğu yerde değeri bir (1) e eşit olsun ve diğer noktalarda değeri sıfır (0) olsun. Yani,

$$\ell_j(x_i)=\begin{cases} 1 & \text{if } j=i \\ 0 & \text{if } j\neq i \end{cases}$$

özelliğini sağlasın. Bu durumda Lagrange interpolasyon polinomu;

Zekeriya Girgin

$$L(x)=\sum_{j=1}^{N}\ell_j(x),\quad \ell_j(x)=\frac{\phi(x)}{(x-x_j)\phi^{(1)}(x_j)}$$

şeklindedir. Buradaki $\phi(x)$ ve $\phi^{(1)}(x_j)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{N}(x-x_i),\quad \phi^{(1)}(x_j)=\frac{d\phi(x_j)}{dx}=\prod_{i=1;i\neq j}^{N}(x_j-x_i)$$

Burada N düğüm (grid) sayısıdır $x_i\ (i=1,2,\ldots,N)$. Ağırlık katsayıları, test fonksiyonundan bağımsızdır. Konunun daha iyi anlaşılması için, üç düğümlü bir fonksiyon kabul edelim ve x değerleri de $x\in[0,1]$ ile tanımlı olsun. Bu durumda birinci düğümde $x_1=0$, ikinci düğümde $x_2=0.5$ ve üçüncü düğümde $x_3=1$ olacaktır (Düzgün dağılım için).

$\ell_1(x)=\dfrac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}$ ve $x=x_1$ için $\ell_1(x_1)=\dfrac{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}=1$ olur.

$x=x_2$ için $\ell_1(x_2)=\dfrac{(x_2-x_2)\cdot(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}=0$ ve $x=x_3$ için $\ell_1(x_3)=\dfrac{(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}=0$ olur.

olduğu görülür. İkinci düğümde $x_2=0.5$ için;

$$\ell_2(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)},\quad \text{for } x=x_2\quad \ell_2(x_2)=\frac{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}=1$$

Son düğümde $x_3=1.0$ için;

$$\ell_3(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)},\quad \text{for } x=x_3\quad \ell_3(x_3)=\frac{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}=1$$

Lagrange interpolasyon polinomlarının uygulaması oldukça fazladır. Yukarıda verilen üç noktaya uygun Lagrange interpolasyon polinomu;

$$L(x)=\sum_{j=1}^{N}\ell_j(x)\ \rightarrow\ L(x)=\sum_{j=1}^{3}\ell_j(x)\ \rightarrow\ L(x)=\ell_1(x)\cdot f(x)+\ell_2(x)\cdot f(x)+\ell_3(x)\cdot f(x)$$

şeklinde hesaplanır. Özellikle diferansiyel denklemlerin çözümünde uygulaması daha fazladır. Lagrange interpolasyon polinomu, kuvvet polinomları ile de elde edilebilir.

$$\ell_1(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\ \rightarrow\ \ell_1(x)=\{1\quad x\quad x^2\}\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\\1&x_3&x_3^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\\1&x_3&x_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0.5&0.25\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&4&-1\\2&-4&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-3\\2\end{Bmatrix}\ \rightarrow \ell_1(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\rightarrow \boxed{\ell_1(x)=1-3\cdot x+2\cdot x^2}$$

Aynı işlemler $x = x_2$ noktası için yapıldığında;

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{Bmatrix} \rightarrow \ell_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \rightarrow \boxed{\ell_2(x) = 4 \cdot x - 4 \cdot x^2}$$

$x = x_3 = 1$ noktası için yapıldığında;

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \ell_3(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \rightarrow \boxed{\ell_3(x) = -1 \cdot x + 2 \cdot x^2}$$

Benzer işlemler 5 tane ızgara (grid) noktası seçilerek yapıldığı takdirde; $(x \in [0,1])$

$$\ell_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 \rightarrow \ell_1(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4\} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

olur. ve $x = x_1 \rightarrow x = 0$ için;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{25}{3} \\ \frac{70}{3} \\ -\frac{80}{3} \\ \frac{32}{3} \end{Bmatrix}$$

Buradan 1. ızgara noktası için polinomun katsayıları;

$$\ell_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 \rightarrow \ell_1(x) = 1 - \frac{25}{3} \cdot x + \frac{70}{3} \cdot x^2 - \frac{80}{3} \cdot x^3 + \frac{32}{3} \cdot x^4$$

şeklinde hesaplanır. Aynı işlemler Diğer kalan dört nokta için hesaplandığında;

$$A^0 = \begin{Bmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \ell_3(x) \\ \ell_4(x) \\ \ell_5(x) \end{Bmatrix} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ \frac{70}{3} & -\frac{208}{3} & 76 & -\frac{112}{3} & \frac{22}{3} \\ -\frac{80}{3} & 96 & -128 & \frac{224}{3} & -16 \\ \frac{32}{3} & -\frac{128}{3} & 64 & -\frac{128}{3} & \frac{32}{3} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. birinci türevi alındığında;

Zekeriya Girgin

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}\ell_1(x)\\ \ell_2(x)\\ \ell_3(x)\\ \ell_4(x)\\ \ell_5(x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2\cdot x & 3\cdot x^2 & 4\cdot x^3\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1\\ \frac{70}{3} & -\frac{208}{3} & 76 & -\frac{112}{3} & \frac{22}{3}\\ -\frac{80}{3} & 96 & -128 & \frac{224}{3} & -16\\ \frac{32}{3} & -\frac{128}{3} & 64 & -\frac{128}{3} & \frac{32}{3}\end{bmatrix}$$

Renklerle çarpımın nasıl yapılacağı gösterilmiştir. Sadece $A^{(1)}_{2,3}$ eleman değerinin nasıl hesaplandığı aşağıda gösterilmiştir.

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}\ell_1(x)\\ \ell_2(x)\\ \boxed{\ell_3(x)}\\ \ell_4(x)\\ \ell_5(x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2\cdot x_2 & 3\cdot x_2^2 & 4\cdot x_2^3\end{Bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}0\\ -12\\ 76\\ -128\\ 64\end{Bmatrix}}_{A(1:5,3)}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & (2\cdot 0.25) & (3\cdot 0.25^2) & (4\cdot 0.25^3)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -12\\ 76\\ -128\\ 64\end{Bmatrix}=\boxed{6}$$

Bir tek $A^{(1)}_{2,3}=\boxed{6}$ olduğu bu şekilde gösterildi. $A^{(1)}_{1,3}$ eleman değerini için;

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix}\ell_1(x)\\ \ell_2(x)\\ \boxed{\ell_3(x)}\\ \ell_4(x)\\ \ell_5(x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2\cdot x_1 & 3\cdot x_1^2 & 4\cdot x_1^3\end{Bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}0\\ -12\\ 76\\ -128\\ 64\end{Bmatrix}}_{A(1:5,3)}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & (2\cdot 0) & (3\cdot 0^2) & (4\cdot 0^3)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -12\\ 76\\ -128\\ 64\end{Bmatrix}=\boxed{-12}$$

olur. Hesaplanan bu değerler aşağıda gösterilmiştir.

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}-\frac{25}{3} & 16 & \boxed{-12} & \frac{16}{3} & -1\\ -1 & -\frac{10}{3} & \boxed{6} & -2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1\\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3}\end{bmatrix} \tag{74}$$

Elde edilen $\left[A^{(1)}\right]$ katsayılar matrisi, fonksiyondan bağımsızdır. Basit bir uygulama olarak aşağıdaki misalleri inceleyiniz

5.4.1 Misal

Zekeriya Girgin

$f(x)=x^2+x-1$ fonksiyonunun 1. türevinin sayısal değerini $x=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1\end{bmatrix}$ noktalarında hesaplayınız.

Çözüm: n=5 için katsayılar matrisi kullanılmalıdır.

$$\frac{df(x)}{dx}=A^{(1)}\cdot f(x)\rightarrow\begin{bmatrix}-\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1\\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1\\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}(x_1^2+x_1-1)\\(x_2^2+x_2-1)\\(x_3^2+x_3-1)\\(x_4^2+x_4-1)\\(x_5^2+x_5-1)\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1\\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1\\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}(0^2+0-1)\\(0.25^2+0.25-1)\\(0.5^2+0.5-1)\\(0.75^2+0.75-1)\\(1^2+1-1)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1\\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1\\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-1\\-\frac{11}{6}\\-\frac{1}{4}\\\frac{5}{16}\\1\end{Bmatrix}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=A^{(1)}\cdot f(x)=\begin{Bmatrix}f'(x_1)\\f'(x_2)\\f'(x_3)\\f'(x_4)\\f'(x_5)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\\3\end{Bmatrix}$$ şeklinde hesaplanır. Aynı işlemler f(x) fonksiyonunun türevi

alındığında $\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+x-1)=2\cdot x+1=\begin{Bmatrix}(2\cdot x_1+1)\\(2\cdot x_2+1)\\(2\cdot x_3+1)\\(2\cdot x_4+1)\\(2\cdot x_5+1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(2\cdot 0+1)\\\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)\\\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)\\\left(2\cdot\frac{3}{4}+1\right)\\(2\cdot 1+1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\\3\end{Bmatrix}$

aynı sonuçların bulunduğu görülür.

5.4.2 Misal

Zekeriya Girgin

$f(x)=\sin(x)+e^{x}+1$ fonksiyonunun 1. türevinin sayısal değerini $x=[0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1]$ noktalarında hesaplayınız.

Çözüm: n=5 için katsayılar matrisi kullanılmalıdır.

$$\frac{df(x)}{dx}=A^{(1)}\cdot f(x) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \left(\sin(x_1)+e^{x_1}+1\right) \\ \left(\sin(x_2)+e^{x_2}+1\right) \\ \left(\sin(x_3)+e^{x_3}+1\right) \\ \left(\sin(x_4)+e^{x_4}+1\right) \\ \left(\sin(x_5)+e^{x_5}+1\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(0)+e^{0}+1 \\ \sin\left(\frac{1}{4}\right)+e^{\frac{1}{4}}+1 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\right)+e^{\frac{1}{2}}+1 \\ \sin\left(\frac{3}{4}\right)+e^{\frac{3}{4}}+1 \\ \sin(1)+e^{1}+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.998095632 \\ 2.253422987 \\ 2.525974131 \\ 2.849193298 \\ 3.256524724 \end{Bmatrix}$$

şeklinde yaklaşık sayısal değeri bulunur. Aynı fonksiyonun gerçek değerleri;

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sin(x)+e^{x}+1\right)=\cos(x)+e^{x}=\begin{Bmatrix} \cos(x)+e^{x} \\ \cos(x)+e^{x} \\ \cos(x)+e^{x} \\ \cos(x)+e^{x} \\ \cos(x)+e^{x} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \cos(0)+e^{0} \\ \cos\left(\frac{1}{4}\right)+e^{\frac{1}{4}} \\ \cos\left(\frac{1}{2}\right)+e^{\frac{1}{2}} \\ \cos\left(\frac{3}{4}\right)+e^{\frac{3}{4}} \\ \cos(1)+e^{1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 2.252937838 \\ 2.526303833 \\ 2.848688885 \\ 3.258584134 \end{Bmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür. n=5 yerine n=11 alındığında daha hassas sonuçlar elde edilmektedir. Elde edilen katsayılar matrisi diferansiyel denklemlerin yaklaşık sayısal çözümlerinde de kullanılmaktadır. Sayısal integral hesabında da oldukça hassas sonuçlar vermektedir.

5.4.3 Misal

$\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1\left(\sin(x)+e^{x}+1\right)\cdot dx$ fonksiyonunun integralini sayısal olarak $x=[0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1]$ noktalarında hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: n=5 için katsayılar matrisi kullanılmalıdır.

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx = B^{(1)}\cdot f(x) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{251}{2880} & \frac{323}{1440} & -\frac{11}{120} & \frac{53}{1440} & -\frac{19}{2880} \\ \frac{29}{360} & \frac{31}{90} & \frac{1}{15} & \frac{1}{90} & -\frac{1}{360} \\ \frac{27}{320} & \frac{51}{160} & \frac{9}{40} & \frac{21}{160} & -\frac{3}{320} \\ \frac{7}{90} & \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\sin(x_1)+e^{x_1}+1\right) \\ \left(\sin(x_2)+e^{x_2}+1\right) \\ \left(\sin(x_3)+e^{x_3}+1\right) \\ \left(\sin(x_4)+e^{x_4}+1\right) \\ \left(\sin(x_5)+e^{x_5}+1\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{251}{2880} & \frac{323}{1440} & -\frac{11}{120} & \frac{53}{1440} & -\frac{19}{2880} \\ \frac{29}{360} & \frac{31}{90} & \frac{1}{15} & \frac{1}{90} & -\frac{1}{360} \\ \frac{27}{320} & \frac{51}{160} & \frac{9}{40} & \frac{21}{160} & -\frac{3}{320} \\ \frac{7}{90} & \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(0)+e^{0}+1 \\ \sin\left(\frac{1}{4}\right)+e^{\frac{1}{4}}+1 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\right)+e^{\frac{1}{2}}+1 \\ \sin\left(\frac{3}{4}\right)+e^{\frac{3}{4}}+1 \\ \sin(1)+e^{1}+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5651017452 \\ 1.271132134 \\ 2.135299802 \\ 3.177980137 \end{Bmatrix}$$

şeklinde yaklaşık sayısal değeri bulunur. Gerçek sonucu ise;

$$\int_0^a \left(\sin(x)+e^x+1\right)\cdot dx = \left(-\cos(x)+e^x+x\right)\Big|_0^a \rightarrow \int_0^a f(x)\cdot dx = \left(-\cos(b)+e^a+a\right)-\left(-\cos(0)+e^0+0\right)$$

$$\int_0^a f(x)\cdot dx = \left(-\cos(b)+e^a+a\right) \rightarrow \int_0^0 f(x)\cdot dx = \left(-\cos(0)+e^0+0\right) = 0.0$$

$$\int_0^{0.25} f(x)\cdot dx = \left(-\cos(0.25)+e^{0.25}+0.25\right) = 0.5651129950$$

$$\int_0^{0.5} f(x)\cdot dx = \left(-\cos(0.5)+e^{0.5}+0.5\right) = 1.271138709$$

$$\int_0^{0.75} f(x)\cdot dx = \left(-\cos(0.75)+e^{0.75}+0.75\right) = 2.135311148$$

$$\int_0^{1} f(x)\cdot dx = \left(-\cos(1)+e^{1}+1\right) = 3.177979523$$

Görüldüğü gibi sonuçlar uyumludur.

6. Matris İşlemleri

Matrisler mühendislikte oldukça sık kullanılmaktadır. Matrislerin tersi birçok farklı yöntemlerle hesaplanmaktadır.

Zekeriya Girgin

Bazen de matrisin tersini hesaplamadan denklem çözümünü yapmak mümkündür. Bu metotların bir kısmı doğrudan çözümü elde eden usullerdir. Bir kısmı da başlangıçta değişkene değer verilir ve her bir iterasyon sonucunda girilen değer, gerçek değere doğru yaklaşır.

6.1 Matrisin tersini alma işlemleri (Matrix Inverse):

Bir matrisin tersinin alınabilmesi için en önemli şart, matrisin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

6.1.1 Kare Matrisin Tersi (Inverse of Square Matrix)

Bir matrisin tersinin hesaplanabilmesi için, determinant değeri, kesinlikle sıfırdan farklı olmalıdır. Matris tersi hesabı için, en kolay bir usül; (nxn) lik matrisin yanına yine (nxn) lik birim matris yazılır ve (nxn) lik matris birim matrise dönüştürüldüğünde, yanındaki birim matris de (nxn) lik ters matrise dönüşmüş olur.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = [A]^{-1} = [B]$$

Burada işlemler yapılırken köşegen üzerinde sıfır değerine sahip eleman bulunduğunda, bu satırdaki elemanların tamamı başka bir satır ile yer değiştirilir. Burada sayısal usüllerden bahsedilecektir. Daha başka matris tersini alma usulleri de mevcuttur. (Lineer Cebir dersinde kullanılan usuller gibi)

1. Matrisin minörün elde edilmesi (ilgili satır ve sütun kapatılıp kalanlarla determinant hesaplanması, indisler +, - diye gider ve + değerler + olarak hesaplanır.)

2. Kofaktörlerin hesaplanması (+ ve – işaretlerin uygulanması)

3. Adjoint hesabı (Matrisin transpozunun alınması)

4. Her değerin, Determinant değerine bölünmesi

6.1.1.1 Misal:

$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen kare matrisin tersini hesaplayınız.

Çözüm: 1. Basamak olarak, matrisinin minörlerinin elde edilmesi: a_{ij} minörün elde edilmesi için, i. satır ile j. sütun kapatılır ve kalan matrisin determinantı hesaplanır. Sadece a_{21} için renkli olarak aşağıda verilmiştir.

$a_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{3} & 4 \\ -4 & \cancel{5} & 3 \end{bmatrix} \rightarrow a_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ Benzer şekilde diğerleri hesaplanır.

$$a_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 20 = -11, a_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = 6 - (-16) = 22, a_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = 10 - (-12) = 22$$

$$a_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1, a_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = 15 - (-4) = 19, a_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = 25 - (-8) = 33$$

Zekeriya Girgin

$$a_{31}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=8-3=5,\; a_{32}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=20-2=18,\; a_{33}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=15-4=11$$

Bu hesaplanan minör değerleri yerine yazıldığında;

$$[A]_{min}=\begin{bmatrix}-11 & 22 & 22\\ 1 & 19 & 33\\ 5 & 18 & 11\end{bmatrix}$$

2.işlem olarak kofaktörlerin hesaplanması;

$$a_{ij}\rightarrow(-1)^{(i+j)}\rightarrow[A]_{kf}=\begin{bmatrix}-11 & -22 & 22\\ -1 & 19 & -33\\ 5 & -18 & 11\end{bmatrix}$$

3.işlem olarak adjoint hesabı , yani kofaktörü elde edilen matrisin transpozunun alınması

$$[A]_{kf}=\begin{bmatrix}-11 & -22 & 22\\ -1 & 19 & -33\\ 5 & -18 & 11\end{bmatrix}\rightarrow [A]_{kf}^{T}=\begin{bmatrix}-11 & -1 & 5\\ -22 & 19 & -18\\ 22 & -33 & 11\end{bmatrix}$$

4.işlem olarak determinant hesaplanması:

$\det(A)=77$ → Bu değer aşağıdaki elde edilen matris elemanlarına bölünür.

$$[A]^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot[A]_{kf}^{T}\rightarrow [A]^{-1}=\frac{1}{-77}\cdot\begin{bmatrix}-11 & -1 & 5\\ -22 & 19 & -18\\ 22 & -33 & 11\end{bmatrix}\rightarrow [A]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{1}{77} & -\frac{5}{77}\\ \frac{2}{7} & -\frac{19}{77} & \frac{18}{77}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

Şeklinde [A] matrisinin tersi hesaplanmış olur.

6.1.2 Kare olmayan Matrislerin Tersi (Pseudo Matrix Inverse)

Kare olmayan matrislerin tersini almada kullanılan bir usuldür. Tersi alınacak bir matrisde satır ve sütun sayısının hangisinin daha büyük olduğuna göre çözüm yapılır. Bu sistem aşağıda şekil ile gösterilmiştir.

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\end{bmatrix}=[C]=[A]^{T}[A]\\ \hline
[A]^{T}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}
\end{array}$$

Zekeriya Girgin

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \end{bmatrix} = [A]^T \\
\hline
[C]^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \end{bmatrix}
\end{array}
= [C]^{-1}[A]^T = [D] = [A]^{-L}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix} = [D][A] = [A]^{-L}[A] = [I] \\
\hline
\underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \end{bmatrix}}_{[A]^{-L}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

1. Matris çarpımı sonucunda küçük boyutlu matris olan [c] matrisi elde edilmelidir.

2. Yukarıda verilen sistemde [A] matrisinin satır sayısı, sütun sayısından fazladır. Dolayısıyla, Transpozuyla çarpıldığında daha küçük matris elde edilmesi gereklidir.

Sonucun nasıl elde edildiği aşağıdaki denklemde izah edilmiştir.

$$[A]^{-L} = \left([A]^T [A]\right)^{-1} [A]^T \tag{75}$$

Eğer [A] matrisinin sütun sayısı satır sayısından fazla ise çözüm;

$$[A]^{-R} = [A]^T \left([A][A]^T\right)^{-1} \tag{76}$$

şeklindedir. Bu durum aşağıda matrislerle izah edilmiştir.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}^T = [C] = [A][A]^T \\
\hline
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
\hline
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \\ \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} \end{bmatrix}
\end{array}
= [A]^{-R} = [A]^T\left([A][A]^T\right)^{-1} = [D]
$$

Zekeriya Girgin

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \\ \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} \end{bmatrix} = [A][D] = [A][A]^{-R} = [I] \\
\hline
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Bu tür matris işlemleri ile kısa şekilde izah edilmiştir. Satır ve sütun sayısı eşit olduğu takdirde yukarıda verilen denklem (75) veya (76) kullanılabilir ve elde edilen sonuçlar aynıdır, değişmez. İlgili misaller aşağıda verilmiştir.

6.1.2.1 Misal

$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen matrisin tersini hesaplayınız.

Çözüm: verilen matriste satır sayısı, sütun sayısından büyüktür. Bu sebeple işleme, denklem (75) kullanılarak çözüm yapılır.

$$
[C]=[A]^T[A]=\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}
\end{array} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}
$$

şeklinde devam edilir.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} \frac{21}{38} & -\frac{16}{38} \\ -\frac{16}{38} & \frac{14}{38} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{11}{38} & -\frac{1}{38} & \frac{26}{38} \\ \frac{12}{38} & \frac{8}{38} & -\frac{18}{38} \end{bmatrix}
\end{array} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{38} & -\frac{1}{38} & \frac{26}{38} \\ \frac{12}{38} & \frac{8}{38} & -\frac{18}{38} \end{bmatrix}^{-L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Görüldüğü gibi, kırmızı ile verilen matris, soldan ters matristir ve kendisi ile çarpıldığında birim matrisi vermektedir.

6.1.2.2 Misal

$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen matrisin tersini hesaplayınız.

Çözüm: verilen matriste satır sayısı, sütun sayısından küçüktür. Bu sebeple işleme, denklem (76) ile devam edilir.

Zekeriya Girgin

$$[C]=[A][A]^T=\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}^T \\ \hline [A]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}14 & 16\\ 16 & 21\end{bmatrix}\end{array}$$

şeklinde devam edilir. [C] matrisin tersi alınıp çarpma yapıldığında,

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}\frac{21}{38} & -\frac{16}{38}\\ -\frac{16}{38} & \frac{14}{38}\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix}-\frac{11}{38} & \frac{12}{38}\\ -\frac{1}{38} & \frac{8}{38}\\ \frac{26}{38} & -\frac{18}{38}\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{11}{38} & \frac{12}{38}\\ -\frac{1}{38} & \frac{8}{38}\\ \frac{26}{38} & -\frac{18}{38}\end{bmatrix}^{-R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ters matris elde edilir.

6.1.2.3 Misal

$x_1+x_2=3$
$x_1-x_2=-1.01$ ile verilen denklem sisteminde, üç denklemi aynı anda kullanarak, bu
$2\cdot x_1-x_2=0.1$
denklemleri sağlayan x_1 ve x_2 değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen denklem sistemi önce matris eşitliğine dönüştürülür.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\ -1.01\\ 0.1\end{Bmatrix}, \rightarrow [A]\{x\}=\{b\}\rightarrow [A]^{-1}[A]\{x\}=[A]^{-1}\{b\}\rightarrow \{x\}=[A]^{-1}\{b\}$$

Buradaki $[A]$ matrisi kare matris olmadığından dolayı, pseudo inverse ile tersi alınmalıdır.

[A] matrisinde satır sayısı, sütun sayısından büyüktür. Bu sebeple işleme, denklem (75) kullanılarak çözüm yapılır.

$$[C]=[A]^T[A]=\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & +2\\ +2 & 6\end{bmatrix}\rightarrow=[C]^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3 & +2\\ +2 & 6\end{bmatrix}$$

şeklinde [C] matrisin tersi hesaplanır. Buradan,

Zekeriya Girgin

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}\frac{3}{14}&\frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{5}{14}&\frac{1}{14}&\frac{4}{14}\\ \frac{8}{14}&-\frac{4}{14}&-\frac{2}{14}\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14}&\frac{1}{14}&\frac{4}{14}\\ \frac{8}{14}&-\frac{4}{14}&-\frac{2}{14}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3\\-1.01\\0.1\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.027857142857143\\1.988571428571429\end{Bmatrix}$$

şeklinde x_1 ve x_2 değerleri elde edilir.

6.1.2.4 Misal

$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\-1.1\\6.8\end{Bmatrix}$ ile verilen denklem sisteminde, *<u>üç denklemi aynı anda kullanarak</u>*, bu denklemleri sağlayan x_1 ve x_2 değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: $\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\-1.1\\6.8\end{Bmatrix}, \rightarrow [A]\{x\}=\{b\} \rightarrow [A]^{-1}[A]\{x\}=[A]^{-1}\{b\} \rightarrow \{x\}=[A]^{-1}\{b\}$

Buradaki $[A]$ matrisi kare matris olmadığından dolayı, Pseudo inverse ile tersi alınmalıdır.

[A] matrisinde satır sayısı, sütun sayısından büyüktür. Bu sebeple

$$[C]=[A]^T[A]=\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\2&1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6&2\\2&3\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}6&2\\2&3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3&2\\2&6\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3&-2\\-2&6\end{bmatrix} \rightarrow =[C]^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3&-2\\-2&6\end{bmatrix}$$

şeklinde [C] matrisinin tersi hesaplanır. Buradan,

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}\frac{3}{14}&-\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{1}{14}&\frac{5}{14}&\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{14}&\frac{5}{14}&\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\-1.1\\6.8\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.9071428571\\3.0285714286\end{Bmatrix}$$

şeklinde x_1 ve x_2 değerleri elde edilir. Sayısal olarak [C] ve [A] matrislerinin tersi aşağıdadır.

$$[C]^{-1}=\begin{bmatrix}0.2142857143 & -0.1428571429\\ -0.1428571429 & 0.4285714286\end{bmatrix},\ [A]^{-L}=\begin{bmatrix}0.0714285714 & 0.3571428571 & 0.2857142857\\ 0.2857142857 & -0.5714285714 & 0.1428571429\end{bmatrix}$$

6.1.2.5 Misal

Misal 4.2.1 de verilen x ve y değerleri için, pseudo ters matrisden faydalanarak, $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ denkleminin katsayılarını hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = y_i$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.5625 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 8.5 & 72.5 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 1.95 \\ 2 \\ 2.4 \\ 2.4 \\ 2.7 \\ 2.6 \end{Bmatrix} \rightarrow [C] = [A]^T [A] = \begin{bmatrix} 7 & 32.25 & 201.8125 \\ 32.25 & 201.8125 & 1441.546875 \\ 201.8125 & 1441.546875 & 10965.37890625 \end{bmatrix}$$

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.59493316786639 & -0.741478178574669 & 0.0681233277619983 \\ -0.74147817857466 & 0.425999674456221 & -0.0423568522821453 \\ 0.0681233277619974 & -0.0423568522821454 & 0.00440579841072879 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-L} = [C]^{-1} [A]^T = \begin{bmatrix} 1.0771 & 0.38447 & -0.016391 & -0.28101 & -0.4015 & 0.023001 & 0.21428 \\ -0.4458 & -0.058906 & 0.15531 & 0.28481 & 0.28967 & -0.044319 & -0.18076 \\ 0.038834 & 0.0010328 & -0.019295 & -0.030811 & -0.027409 & 0.01124 & 0.026409 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [A]^{-L} \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 1.95 \\ 2 \\ 2.4 \\ 2.4 \\ 2.7 \\ 2.6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.990728356411968 \\ 0.449900617012456 \\ -0.030693804365614 \end{Bmatrix}$$

şeklinde katsayılar hesaplanır ve bu değerler öncekilerle aynıdır. Eğri uydurmada verilen bütün misaller bu usulle de çözülebilir. Sadece burada birisi verilmiştir.

6.2 Doğrudan çözümü elde eden yöntemler:

$[A]\{x\} = \{b\}$ şeklinde bir matris eşitliği verildiğinde, bilinmeyen $\{x\}$ değerlerini hesaplamak için, başlangıçta bilinmeyenlere değer girilmeden hesaplanır. Bunlardan iki tanesi aşağıda verilmiştir.

6.2.1 Gauss Yok etme metodu (Gauss Elimination Method)

Bu metot ile $[A]\{x\} = \{b\}$ matris işleminde bilinmeyen $\{x\}$ vektörünün çözümünün nasıl yapılacağı verilmiştir.

Zekeriya Girgin

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \{b\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Temel prensip olarak $[A]$ matrisi ve $\{b\}$ vektörü yan yana yazılır.

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & b_n \end{array}\right] \tag{77}$$

[A] matrisinin köşegeninin altındaki tüm elemanlar sıfırlandığında, {x} bilinmeyen vektörünün son elemanı aşağıdaki şekilde hesaplanmış olur.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{Bmatrix} \rightarrow a_{n,n}\cdot x_n = b_n \rightarrow x_n=\frac{b_n}{a_{n,n}}$$

Dikkat edilmesi gerekli hususlar aşağıda verilmiştir.

1. Birinci satırın ilk elemanı (a_{11}) in sıfırdan farklı olup olmadığına bakılır Eğer sıfır ise alttaki satırın tüm elemanları, üstteki satır ile yer değiştirilir. Bu işlem bütün köşegen elemanları için aynen uygulanır.

2. (a11) elemanın altındaki tüm elemanlar sıfırlanır.

3. Aynı işlemler (a_{22}) den ($a_{n-1,n-1}$) elemanına kadar uygulanır. İşlemler tamamlandığında üst üçgen matris elde edilir. Buradan çözüme geçilir. En son elemanın bulunan değeri bir üst satırda yerine yazılarak bütün elemanlar hesaplanmış olur.

6.2.1.1 Misal:

Aşağıda verilen [A] matrisi ve {b} vektörü verildiğinde, x vektörünü Gauss Yok etme metoduna göre hesaplayınız.

$$[A]=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \{x\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \rightarrow \{b\}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \quad [A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

Burada görüldüğü gibi, (a_{11}) elemanının altındaki tüm elemanlar (mavi ile gösterilen) sıfırlanmalıdır. Bunun için,

1. satırın (-2/5) ile çarpılmış değeri, 2. satır ile toplandığında;

Zekeriya Girgin

$$[A\mid b]= \begin{matrix} -2/5\times \\ \to \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

elde edilir. a_{31}=-4 olduğundan bu değerin sıfır olması için birinci satırın (4/5) ile çarpılmış değeri en alt satırla toplanmalıdır.

$$\begin{matrix} (4/5)\times \\ \\ \to \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} & \frac{19}{5} & \frac{123}{5} \end{array}\right]$$

Şimdi de 2. satırda a_{22} elemanının altındaki a_{32} elemanının sıfırlanması için, 2. satırın (-3) ile çarpılmış değeri 3. satır ile toplanmalıdır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right]$$

En son satırdan x3 değeri hesaplanır ve bu değer bir üstteki satırda yazılarak x2 hesaplanır.

$$-7\cdot x_3=-21 \rightarrow x_3=3 \rightarrow \frac{11}{5}\cdot x_2+\frac{18}{5}\cdot x_3=\frac{76}{5} \rightarrow \frac{11}{5}\cdot x_2+\frac{18}{5}\cdot 3=\frac{76}{5} \rightarrow \frac{11}{5}\cdot x_2=\frac{22}{5} \rightarrow x_2=2$$

Elde edilen değerler en üst satırda yerine yazıldığında;

$5\cdot x_1+2\cdot x_2+x_3=12 \rightarrow 5\cdot x_1+2\cdot 2+3=12 \rightarrow x_1=1$ değeri elde edilir.

6.2.2 Gauss-Jorden Yöntemi (Gauss – Jorden Method):

Gauss yok etme yönteminden farklı olarak Burada [A] matrisi birim matrise dönüştürüldüğünde, {b} vektörü {x} vektörüne dönüşür. İşlemlerde önce 1. satırdan başlayarak a_{ii}=0 ise alttaki satır ile yer değiştirilerek bu durumdan kurtarılır. Daha sonra bu kolon üzerindeki bütün elemanlar sıfırlanır.

6.2.2.1 Misal:

Yukarıdaki aynı problemi Gauss-Jorden metodu ile çözünüz.

Aşağıda verilen [A] matrisi ve {b} vektörü verildiğinde, x vektörünü Gauss Yok etme metoduna göre hesaplayınız.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \rightarrow [A]\{x\}=\{b\} \rightarrow [A\mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

Çözüm:

1. Birinci satırın ilk elemanı (a_{11}) in sıfırdan farklı olup olmadığına bakılır Eğer sıfır ise alttaki satırın tüm elemanları, üstteki satır ile yer değiştirilir. Bu işlem bütün köşegen elemanları için aynen uygulanır. Burada sıfırdan farklıdır.

Zekeriya Girgin

2. Eleman sıfırdan farklı ise bütün o satırın elemanları, köşegen elemanına bölünerek köşegen elemanın değeri 1 e eşitlenmiş olur. (Not: bu işlem Gauss yok etmede uygulanmıyordu.)

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

a_{11} elemanının altındaki bütün değerler sıfırlanmalıdır.

Bunun için ilk olarak a_{21}=0 olması için; 1. satırın (-2) ile çarpılmış değeri, 2. satır ile toplanmalıdır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ -4 & 5 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

→ a_{31}=0 olması için; 1. satırın (4) ile çarpılmış değeri, 3. satır ile toplanmalıdır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{18}{5} & \frac{76}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} & \frac{19}{5} & \frac{123}{5} \end{array}\right]$$

→ Sırada a_{22}=1 olacak çarpan değeri (5/11) dir. Dolayısıyla 2 satırın bütün elemanları bu değer ile çarpılmalıdır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{18}{11} & \frac{76}{11} \\ 0 & \frac{33}{5} & \frac{19}{5} & \frac{123}{5} \end{array}\right]$$

→ a_{22} elemanının üzerindeki a_{21} elemanının sıfır olması için, 2. satırın (-2/5) ile çarpılmış değeri, 1. satır ile toplanmalıdır. Buradan;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{18}{11} & \frac{76}{11} \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right]$$

→ (a_{33}) elemanının 1 e eşitlenmesi için 3. satır (-1/7) ile çarpılmalıdır.

Zekeriya Girgin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{18}{11} & \frac{76}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{18}{11} & \frac{76}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi A matrisi, birim matrise dönüştüğünde en sağdaki b vektörünün değeri x vektörüne dönüşmektedir.

6.3 Tekrarlama (Iteration) ile çözümü elde edilebilen yöntemler:

Burada bilinmeyene başlangıçta herhangi bir değer girilir ve her bir tekrarlama (iterasyon) sonucunda, bilinmeyen değerler, doğruya biraz daha yaklaşır. Tekrarlamaya devam edildiğinde bilinmeyenler değişmemeye başladığında gerçek değerler elde edilmiş olur.

Fakat bu tekrarlama işlemleri her matrise uygulanamaz. bazı şartlar dahilinde uygulanabilir. Bunun için aşağıdaki tanımlamalar gereklidir.

Spectra (Işın yayılma) Yarıçapı (Spectral Radius):

Bir [A] matrisin spectra yarıçapı ρ,

$$\rho(A) = \max|\lambda| \tag{78}$$

ile tanımlıdır. Burada λ, [A] matrisinin öz değeridir. Eğer öz değer karmaşık sayı ise,

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot i, \qquad |\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{79}$$

şeklindedir ve Spectra Radius ($\rho<1$) şartı sağlandığı takdirde aşağıdaki iterasyon usulleri uygulanabilir.

Birleşen (Kesişen) Matrisler (Convergent Matrices):

Bir matrisin kuvvetleri arttıkça kendisi küçülüyorsa yani sıfıra yaklaşıyorsa bunlara Birleşen matrisler denir.

$$\lim_{x\to\infty} (A)_{ij}^{k} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \, (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{80}$$

6.3.1 Jacobi Yöntemi (Jacobi Method):

Bu usul en kolay olanı denilebilir. İki farklı çözüm tarzı vardır. Birincisi el ile çözüm, diğeri bilgisayara uygun çözümdür. Her iki çözüm için de ilk önce matrisde köşegen üzerindeki elemanların hepsi de mutlak değerce en büyük olacak şekilde satır elemanlarda değişiklik yapılır ve *başlangıçta herhangi bir sayısal değerle işleme başlanır.* El ile çözümde, *<u>her bir bilinmeyen için sırasıyla denklem elde edilir. ve her tekrarlama bitinceye kadar, bu denklemlerde hesaplanan bilinmeyen değerleri, işleme konulmaz. Ancak hepsi tamamlandığında toptan değiştirilir.</u>* ve bu şekilde elde edilen çözümlerdeki sonuçlar bir önceki sonuç ile aynı hâle geldiğinde, bilinmeyenler hesaplanmış olur.

İşlemlerin anlaşılabilmesi için ilk tekrarlamanın nasıl yapıldığını görelim. Yine (3x3) boyutlu bir matris eşitliği kabul edilsin.

Zekeriya Girgin

$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \{b\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$ ve $[A]\{x\}=\{b\}$ denklemini çözmek istiyoruz. Buradan x vektörü için üç tane denklem elde edilebilir. Bunlar aşağıda verilmiştir.

$$a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3=b_1 \rightarrow a_{11}\cdot x_1=b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3 \rightarrow \boxed{x_1=\frac{b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3}{a_{11}}} \quad (81)$$

$$a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3=b_2 \rightarrow a_{22}\cdot x_2=b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3 \rightarrow \boxed{x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3}{a_{22}}} \quad (82)$$

$$a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3=b_3 \rightarrow a_{33}\cdot x_3=b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2 \rightarrow \boxed{x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2}{a_{33}}} \quad (83)$$

tekrarlamaya başlangıç değerleri olarak sıfır girildiğinde {x} vektörü;

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

haline gelir. Denklem (81) de yerine yazıldığında;

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3}{a_{11}}=\frac{b_1-a_{12}\cdot 0-a_{13}\cdot 0}{a_{11}} \rightarrow \boxed{x_1=\frac{b_1}{a_{11}}} \quad (85)$$

olarak hesaplanır. Fakat x_1 in bu yeni değeri x_2 hesaplamasında kullanılmaz. x_2 için denklem (82) den faydalanılır.

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3}{a_{22}} \rightarrow x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot 0-a_{23}\cdot 0}{a_{22}} \rightarrow \boxed{x_2=\frac{b_2}{a_{22}}} \quad (86)$$

Benzer şekilde yeni elde edilen x_1 ve x_2 değerleri de denklem (83) de kullanılmamaktadır. (Çünkü tüm iterasyon tamamlanmadı.)

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2}{a_{33}} \rightarrow x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot 0-a_{32}\cdot 0}{a_{33}} \rightarrow \boxed{x_3=\frac{b_3}{a_{33}}} \quad (87)$$

Bu işlemler benzer şekilde tekrarlanarak bilinmeyenler hesaplanır. Fakat bütün matris işlemlerine doğrudan uygulanamaz. Uygulanabilmesi için, [A] matrisin işleme uygun olup olmadığı (spectra yarıçapı 1 den küçük olmalıdır) test edilmelidir. Bu nedenle sistem,

$$\{x\}^k=[T]\{x\}^{k-1}+\{c\} \quad (88)$$

formunda yazılmalıdır. Aşağıdaki tarz (usûl) bilgisayara uygun olanıdır.

$$[A]\{x\}=\{b\} \rightarrow [A]=[D]+[L]+[U] \rightarrow ([D+L+U])\{x\}=\{b\} \rightarrow [D]\{x\}=(-[L]-[U])\{x\}+\{b\}$$

Zekeriya Girgin

yazılabilir. Burada; $[D]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, [L]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, [U]=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. [D] matrisinin tersini almak mümkün ise, yani [D] matrisindeki bütün köşegen elemanları sıfırdan farklı ise;

$$[D]^{-1}[D]\{x\}=[D]^{-1}(-[L]-[U])\{x\}+[D]^{-1}\{b\} \rightarrow \{x\}=[D]^{-1}(-[L]-[U])\{x\}+[D]^{-1}\{b\}$$

yazılabilir. Burada

$$[T]=[D]^{-1}(-[L]-[U]), \quad \{c\}=[D]^{-1}\{b\} \tag{89}$$

olduğu görülür. Çözümün yapılabilmesi için [T] matrisinin spectra yarıçapı;

$$\rho(T)=\max|\lambda|<1 \tag{90}$$

olmalıdır. Bu şart sağlanmadığı takdirde çözüm yapılamaz.

6.3.1.1 Misal:

Aşağıda verilen [A] matrisi ve {b} vektörü verildiğinde, {x} bilinmeyen vektörü için başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak, Jacobi yöntemi ile 5. iterasyona kadar hesaplayınız.

$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix}$, burada $[A]=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\{b\}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır.

Çözüm: ilk önce çözüme uygun olup olmadığı test edilmelidir. Bu nedenle sistem

$\{x\}^k=[T]\{x\}^{k-1}+\{c\}$ formunda yazılmalıdır.

$$5\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3=12 \rightarrow x_1=0\cdot x_1-\frac{2}{5}\cdot x_2-\frac{1}{5}\cdot x_3+\frac{12}{5}$$

$$2\cdot x_1+3\cdot x_2+4\cdot x_3=20 \rightarrow x_2=-\frac{2}{3}\cdot x_1+0\cdot x_2-\frac{4}{3}\cdot x_3+\frac{20}{3}$$

$$-4\cdot x_1+5\cdot x_2+3\cdot x_3=15 \rightarrow x_3=\frac{4}{3}\cdot x_1-\frac{5}{3}\cdot x_2+0\cdot x_3+\frac{15}{3}$$

Buradan [T] matrisi ve {c} vektörü hesaplanır.

$$[T]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{c\}=\begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{15}{3} \end{Bmatrix} \rightarrow \rho(T)=\max|\lambda|=1.72038827913837$$

Zekeriya Girgin

Bu değer $\rho(T)<1$ olması gerektiğinden çözüme uygun değildir. Fakat bu matris uygun hale getirilebilir. Bunun için [A] matrisinin dominant matris (*yani köşegen üzerindeki elemanların mutlak değeri bulunduğu satırda maksimum olmalıdır*.) olması şarttır.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Bunun için matrise satır işlemleri uygulayarak (toplamak veya çıkarmak gibi) veya satırların yerlerini değiştirerek, dominant matris haline getirilebilir.

$$5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 12 \rightarrow \boxed{x_1 = \frac{12 - 2\cdot x_2 - x_3}{5}} \rightarrow x_1 = \frac{12 - 2\cdot 0 - 0}{5} \rightarrow x_1 = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$-4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 15 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{15 + 4\cdot x_1 - 3\cdot x_3}{5}} \rightarrow x_2 = \frac{15 + 4\cdot 0 - 3\cdot 0}{5} \rightarrow x_2 = \frac{15}{5} = 3$$

$$2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 20 \rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{2}{4}\cdot x_1 - \frac{3}{4}\cdot x_2 + \frac{20}{4}} \rightarrow x_3 = \frac{20}{4} = 5$$

Şeklinde 1. tekrarlama sonucunda, yukarıda verilen değerler elde edilir. İkinci tekrarlama (iterasyon) için artık bu değerlerler $\left(\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 2.4 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} \right)$ kullanılacaktır.

2. tekrarlama için;

$$\boxed{x_1 = \frac{12 - 2\cdot x_2 - x_3}{5}} \rightarrow x_1 = \frac{-2\cdot 3 - 1\cdot 5 + 12}{5} \rightarrow \boxed{x_1 = 0.2}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{15 + 4\cdot x_1 - 3\cdot x_3}{5}} \rightarrow x_2 = \frac{4\cdot 2.4 - 3\cdot 5 + 15}{5} \rightarrow \boxed{x_2 = 1.92}$$

$$\boxed{x_3 = -\frac{2}{4}\cdot x_1 - \frac{3}{4}\cdot x_2 + \frac{20}{4}} \rightarrow x_3 = -\frac{2}{4}\cdot 2.4 - \frac{3}{4}\cdot 3 + \frac{20}{4} \rightarrow \boxed{x_3 = 1.55}$$

Aynı işlemler Bilgisayar kullanıldığı takdirde Denklem (88) ve (89) kullanılarak daha kolay hesaplanabilir. Fakat bu çözüm el ile hesaplamaya uygun değildir.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 5 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 5 \end{Bmatrix}$$

1. tekrarlama (iterasyon) sonunda,

Zekeriya Girgin

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{48}{25} \\ \frac{31}{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 1.92 \\ 1.55 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{48}{25} \\ \frac{31}{20} \end{Bmatrix}_2 + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{661}{500} \\ \frac{223}{100} \\ \frac{173}{50} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.322 \\ 2.23 \\ 3.46 \end{Bmatrix}$$

Benzer işlemler 4, 5. ve 6. iterasyonda tekrarlandığında,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_4 = \begin{Bmatrix} 0.816 \\ 1.9816 \\ 2.6665 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_5 = \begin{Bmatrix} 1.07406 \\ 2.0529 \\ 3.1058 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_6 = \begin{Bmatrix} 0.95768 \\ 1.995768 \\ 2.923295 \end{Bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi değerler gittikçe gerçek değere doğru yaklaşmaktadır.

Görüldüğü gibi iki usul ile yapılan hesaplamalarda aynı {x} değerleri elde edilmektedir.

Dikkat edilirse, Jacobi yönteminde hesaplanan değerler hemen yerine yazılmamaktadır. Ancak tekrarlama (iterasyon) tamamlandıktan sonra, diğer tekrarlamada (iterasyonda) bu değerler kullanılmaktadır.

6.3.1.2 Misal:

Aşağıda verilen [A] matrisi ve {b} vektörü verildiğinde, {x} bilinmeyen vektörü için başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak, Jacobi yöntemi ile 10. iterasyona kadar hesaplayınız.

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 11 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 22 \\ -10 \end{Bmatrix}$$, burada $[A] = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 11 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ ve $\{b\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 22 \\ -10 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır

Çözüm: El ile çözüm yapılacak ise yukarıdaki misalde görüldüğü gibi ilk önce [A] matrisinin köşegenleri mutlak değerce bulunduğu satırda maksimum olmalıdır. Şu andna uygun olduğu görülmektedir. El ile çözüm için;

Zekeriya Girgin

$10\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 = 6 \rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{6 + x_2 - 2\cdot x_3}{10}} \rightarrow x_1 = \dfrac{6+0-2\cdot 0}{10} \rightarrow x_1 = \dfrac{6}{10} = 0.6$

$-1\cdot x_1 + 11\cdot x_2 - 1\cdot x_3 = 22 \rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{22 + x_1 + x_3}{11}} \rightarrow x_2 = \dfrac{22+0+0}{11} \rightarrow x_2 = \dfrac{22}{11} = 2$

$2\cdot x_1 - x_2 + 10\cdot x_3 = -10 \rightarrow \boxed{x_3 = \dfrac{-10 - 2\cdot x_1 + x_2}{10}} \rightarrow x_3 = \dfrac{-10-2\cdot 0+0}{10} \rightarrow x_3 = \dfrac{-10}{10} = -1$

şeklinde 1. tekrarlama sonucunda, yukarıda verilen değerler elde edilir. İkinci tekrarlama (iterasyon) için artık bu değerler $\left(\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}\right)$ kullanılacaktır.

2. tekrarlama için;

$\boxed{x_1 = \dfrac{6 + x_2 - 2\cdot x_3}{10}} \rightarrow x_1 = \dfrac{6+2-2\cdot(-1)}{10} \rightarrow x_1 = \dfrac{10}{10} \rightarrow \boxed{x_1 = 1.0}$

$\boxed{x_2 = \dfrac{22 + x_1 + x_3}{11}} \rightarrow x_2 = \dfrac{22+0.6+(-1)}{11} \rightarrow \boxed{x_2 = 1.964}$

$\boxed{x_3 = \dfrac{-10 - 2\cdot x_1 + x_2}{10}} \rightarrow x_3 = \dfrac{-10-2\cdot 0.6+2}{10} \rightarrow \boxed{x_3 = -0.92}$

Diğer tekrarlama değerleri, aşağıda bilgisayar çözümünde verilmiştir. Bilgisayar çözümü için ilk önce [A] matrisi, denklem (88) ve (89) formunda yazılmalıdır. Buradan,

$[T] = [D]^{-1}(-[L]-[U]),\quad \{c\} = [D]^{-1}\{b\}$ olmalıdır.

$$[D] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\ [U] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ [L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \{b\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 22 \\ -10 \end{Bmatrix} \qquad (91)$$

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},\ \{c\} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{5} \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad (92)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix},\quad p = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{11} & -\lambda & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\quad p = \lambda^3 - \frac{16}{275}\cdot\lambda + \frac{1}{275}$$

$\lambda^3-\frac{16}{275}\cdot\lambda+\frac{1}{275}=0$ Bu polinomun kökleri öz değerleri verir. Bu değerler;

$\lambda_{1,2,3}=\text{-}0.26787,\ 0.06787,\ 0.2$ şeklindedir → $\rho(T)=\max|\lambda|=0.26787<1$

olduğundan çözüme uygundur. Jacobi yöntemi uygulanabilir.

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_{i+1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_i+\begin{Bmatrix}\frac{3}{5}\\2\\-1\end{Bmatrix} \tag{93}$$

Başlangıçta bütün değerler sıfır alındığında, 1. iterasyon sonunda;

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}0+\begin{Bmatrix}\frac{3}{5}\\2\\-1\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0.6\\2.0\\-1.0\end{Bmatrix}$$ olarak bulunur. 2. iterasyon için;

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.6\\2.0\\-1.0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.6\\2.0\\-1.0\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1.0\\1.964\\-0.92\end{Bmatrix}$$ şeklinde hesaplanır.

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_3=\begin{Bmatrix}0.9804\\2.007\\-1.004\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_4=\begin{Bmatrix}1.001\\1.998\\-0.9952\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_5=\begin{Bmatrix}0.9989\\2.001\\-1.001\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_6=\begin{Bmatrix}1.000\\2.000\\-0.9997\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_7=\begin{Bmatrix}1.000\\2.000\\-1.000\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_8=\begin{Bmatrix}0.9999\\2.000\\-1.000\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_9=\begin{Bmatrix}1.000\\2.000\\-1.000\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_{10}=\begin{Bmatrix}1.000\\2.000\\-1.000\end{Bmatrix}$$

Böylece sonuçların hızlı bir şekilde gerçek değere gittiği görülür. $\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_{\text{gerçek}}=\begin{Bmatrix}1\\2\\-1\end{Bmatrix}$

6.3.2 Gauss-Seidel Yöntemi (Gauss-Seidel Method):

Bu usul de, Jacobi çözümünde olduğu gibi doğrudan çözüm elde edilmez. Bilinmeyenlere başlangıçta keyfi değer verilir ve tekrarlama (iterasyon) yapıldıkça, bilinmeyenler gerçek değere doğru yaklaşmaya başlar. Bunun için lineer olarak verilen

$$[A]\{x\}=\{b\} \tag{94}$$

Zekeriya Girgin

Çözüm el ile ve bilgisayar ile olmak üzere iki farklı şekilde yapılabilir. El ile çözüm için daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıda (3x3) boyutlu bir matris eşitliği verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix},\ [A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\{b\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{95}$$

Denklem (95) ile verilen $[A]\{x\}=\{b\}$ denkleminde $\{x\}$ bilinmeyenlerinin hesaplanması isteniyor. Buradan x vektörü için üç tane denklem elde edilebilir. Bunlar aşağıda verilmiştir.

$$a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3=b_1 \rightarrow a_{11}\cdot x_1=b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3 \rightarrow x_1=\frac{b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3}{a_{11}} \tag{96}$$

$$a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3=b_2 \rightarrow a_{22}\cdot x_2=b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3 \rightarrow x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3}{a_{22}} \tag{97}$$

$$a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3=b_1 \rightarrow a_{33}\cdot x_3=b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2 \rightarrow x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2}{a_{33}} \tag{98}$$

Tekrarlamaya (iterasyona) başlangıç değerleri sıfır olarak girildiğinde {x} vektörü;

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{99}$$

haline gelir. Denklem (96) da yerine yazıldığında;

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\cdot x_2-a_{13}\cdot x_3}{a_{11}}=\frac{b_1-a_{12}\cdot 0-a_{13}\cdot 0}{a_{11}} \rightarrow x_1=\frac{b_1}{a_{11}} \tag{100}$$

olarak hesaplanır. Bu değer denklem (97) de yerine yazıldığında;

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot x_1-a_{23}\cdot x_3}{a_{22}} \rightarrow x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}-a_{23}\cdot 0}{a_{22}} \rightarrow x_2=\frac{b_2-a_{21}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}}{a_{22}} \tag{101}$$

olur. Görüldüğü gibi elde edilen son x_i değeri, diğerinde hemen kullanılmaktadır.

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot x_1-a_{32}\cdot x_2}{a_{33}} \rightarrow x_3=\frac{b_3-a_{31}\cdot\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)-a_{32}\cdot\left(\frac{b_2-a_{21}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}}{a_{22}}\right)}{a_{33}} \tag{102}$$

Denklem (100), (101) ve (102) ile elde edilen x değerleri ikinci iterasyonda Denklem (96) , (97) ve (98) de yerine yazılarak tekrar hesaplanır. İkinci iterasyonda değerler sıfırdan farklıdır. Böylece işleme devam edildiğinde kök değerlerine yaklaşılır. Bu iterasyon işlemi Denklem (105) ile elde edilen sonuçlarla aynıdır.

x_i değerleri aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir.

$$x_i^{(k)}=\frac{1}{a_{i,i}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{i,j}x_j^{(k-1)}-\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j^{(k-1)}\right] \tag{103}$$

Zekeriya Girgin

Burada k iterasyon sayısını vermektedir. Yani Gauss-Seidel yöntemi için Denklem (103) de aynı sonuçları verir.

Bilgisayar çözümü için $[A]_{3\times3}$ matrisi, 3 farklı matrisin toplamı şeklinde yazılmalıdır.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ [D]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},\ [L]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix},\ [U]=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$[A]=[D]+[L]+[U] \rightarrow ([D]+[L]+[U])\{x\}=\{b\} \rightarrow ([D]+[L])\{x\}=(-[U])\{x\}+\{b\}$$

$$([D]+[L])^{-1}([D]+[L])\{x\}=([D]+[L])^{-1}(-[U])\{x\}+([D]+[L])^{-1}\{b\}$$

$$\{x\}=([D]+[L])^{-1}(-[U])\{x\}+([D]+[L])^{-1}\{b\}$$

veya,

$$\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\} \quad (105)$$

olur. Buradaki [T] matrisi ve {c} vektörü aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$[T]=([D]+[L])^{-1}(-[U]),\quad \{c\}=([D]+[L])^{-1}\{b\} \quad (106)$$

Denklem (105) iterasyon ile çözüldükçe {x} vektörü gerçek değerlere doğru yaklaşır. Bu usulün uygulanabilmesi için ilk önce Denklem (78) ile verilen spectra yarıçapının, Denklem (105) ve (106) de verilen [T] matrisine uygulanması gerekir ve bu spectra yarıçapının 1 den küçük olması şarttır. veya [T] matrisinin köşegeni üzerindeki bütün elemanların, o köşegenin bulunduğu satırdaki bütün elemanlardan büyük veya eşit olması şarttır.

$$[T]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,i} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix},\quad a_{i,i}\geq a_{i,j}\ \left(j=1,2,\ldots,n\right) \quad (107)$$

Denklem (105) ve (106) yi kullanmak yerine, bilinmeyenlerin hesaplanabilmesi için aynı işlemlerin el ile nasıl yapıldığı (3x3) lük bir matriste tarif edilmiştir. Başlangıçta bilinmeyenlere bir değer verilir ve bu değerler her hesaplanan her bilinmeyen için yenilenir yani kullanılır.

6.3.2.1 Misal:

Aşağıda verilen [A] matrisi ve {b} vektörü verildiğinde, {x} bilinmeyen vektörü için, başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak, Gauss-Seidel yöntemi ile 5. iterasyona kadar hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Çözüm: Bu tür problemlerin çözümü, el ile farklı ve bilgisayar ile farklıdır. Bilgisayar çözümü büyük sistemlere uygundur. El ile çözüm, sadece sistemin nasıl çalıştığını göstermesi açısından uygundur. İşleme başlamadan önce [A] matrisinin köşegeninde bulunan elemanlar mutlak değerce aynı satırdaki elemanlardan büyük veya eşit olmalıdır. Aksi takdirde tekrarlama (iterasyon) ile çözüme gidilemez. Onun için ilk önce el ile çözüm izah edilecek, daha sonra bilgisayar çözümü verilecektir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \text{ (Satırlar yer değiştirildiğinde)} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Aynı çözümler aşağıdaki şekilde de yapılabilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 12 \\ -4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 15 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 20 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 5\cdot x_1 = -2\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 12 \\ 5\cdot x_2 = 4\cdot x_1 - 3\cdot x_3 + 15 \\ 4\cdot x_3 = -2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 20 \end{matrix}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-2\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 12}{5}}, \quad \boxed{x_2 = \frac{4\cdot x_1 - 3\cdot x_3 + 15}{5}}, \quad \boxed{x_3 = \frac{-2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 20}{4}}$$

Yukarıdaki denklemler, hesaplamada kullanılacak temel denklemlerdir. 1. iterasyon için başlangıç değerleri sıfır olduğundan,

$x_1 = \frac{-2\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 12}{5} \rightarrow x_1 = \frac{-2\cdot 0 - 1\cdot 0 + 12}{5} \rightarrow x_1 = \frac{12}{5} \rightarrow \boxed{x_1 = 2.4}$ olarak hesaplanır. Bu değer x_2 hesaplanırken kullanılır.

$x_2 = \frac{4\cdot 2.4 - 3\cdot 0 + 15}{5} \rightarrow \boxed{x_2 = 4.92}$ Yeni elde edilen x_1 ve x_2 değerleri x_3 de yerine yazılır.

$x_3 = \frac{-2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 20}{4} \rightarrow x_3 = \frac{-2\cdot 2.4 - 3\cdot 4.92 + 20}{4} \rightarrow \boxed{x_3 = 0.11}$ olarak hesaplanır. Yani 1. tekrarlama (iterasyon) sonunda, $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 == \begin{Bmatrix} 2.4 \\ 4.92 \\ 0.11 \end{Bmatrix}$ olduğu görülür. Bu değerler aşağıda bilgisayar ile elde edilenlerin aynısıdır. 2. iterasyon için en sürekli en son elde edilen değerler kullanıldığından,

$$x_1 = \frac{-2\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 12}{5} \rightarrow x_1 = \frac{-2\cdot 4.92 - 1\cdot 0.11 + 12}{5} \rightarrow \boxed{x_1 = 0.41}$$

$$x_2 = \frac{4\cdot x_1 - 3\cdot x_3 + 15}{5} \rightarrow x_2 = \frac{4\cdot 0.41 - 3\cdot 0.11 + 15}{5} \rightarrow \boxed{x_2 = 3.262}$$

$$x_3 = \frac{-2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 20}{4} \rightarrow x_3 = \frac{-2\cdot 0.41 - 3\cdot 3.262 + 20}{4} \rightarrow \boxed{x_3 = 2.3485}$$

Zekeriya Girgin

Bu değerlerin de aşağıda yapılan hesaplamalar ile aynı olduğu görülür. Benzer şekilde diğer iterasyonlar da hesaplanabilir. Diğer tekrarlama sonuçları, bilgisayara uygun olarak yapılan çözümlerde verilmiştir.

Bilgisayar çözümü için, ilk önce matrisin ilk verilişinin uygun olmadığı verilecektir. [T] matrisi ve {c} vektörü hesaplanır.

$$[T]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix},\quad \{c\}=\begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{15}{3} \end{Bmatrix} \rightarrow \rho(T)=\max|\lambda|=1.72038827913837$$

Bu değer $\rho(T)<1$ olması gerektiğinden çözüme uygun değildir. Aynı [T] matrisi Denklem (106) ile de hesaplanabilir.

$$[T]=([D]+[L])^{-1}(-[U]) \rightarrow [T]=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [T]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{15} & -\frac{6}{5} \\ 0 & -\frac{44}{45} & \frac{26}{15} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-\frac{32}{45}\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1-\frac{1}{15}\sqrt{385},\ \lambda_3=1+\frac{1}{15}\sqrt{385}>1$$

Görüldüğü gibi değerlerden bir tanesi 1 den büyük olduğundan çözüme uygun değildir. Çözüme uygun olması için [A] matrisinin dominant olması (yani köşegen üzerindeki elemanların mutlak değerinin maksimum olması) gerekir. Bunun için [A] matrisinin her satırında maksimum olan değerler mavi ile gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \text{ (Satırlar yer değiştirildiğinde) } \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

olur. Bu form uygundur. İlk önce matris yapısının çözüme uygun olup olmadığı test edilmelidir. Bu nedenle sistem $\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\}$ formunda yazılmalıdır.

$$[T]=([D]+[L])^{-1}(-[U]) \rightarrow [T]=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [T]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{8}{25} & -\frac{19}{25} \\ 0 & \frac{11}{25} & \frac{67}{100} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3-\frac{7}{20}\lambda^2+\frac{3}{25}\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{7}{40}-\frac{1}{40}\sqrt{143}\,I,\ \lambda_3=\frac{7}{40}+\frac{1}{40}\sqrt{143}\,I<1$$

Zekeriya Girgin

$$\{c\} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{8}{25} & -\frac{19}{25} \\ 0 & \frac{11}{25} & \frac{67}{100} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{i} + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{Bmatrix}$$

Bu denklemde {x} bilinmeyen vektörü için başlangıç değerleri sıfır alındığında 1. iterasyon sonunda;

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{8}{25} & -\frac{19}{25} \\ 0 & \frac{11}{25} & \frac{67}{100} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4 \\ 4.92 \\ 0.11 \end{Bmatrix}$$

olarak hesaplanır. 2. iterasyon sonunda,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{8}{25} & -\frac{19}{25} \\ 0 & \frac{11}{25} & \frac{67}{100} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{11}{100} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{41}{100} \\ \frac{1631}{500} \\ \frac{4697}{2000} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.41 \\ 3.262 \\ 2.3485 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 0.6255 \\ 2.0913 \\ 3.118775 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_4 = \begin{Bmatrix} 0.939725 \\ 1.880515 \\ 3.11975125 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_5 = \begin{Bmatrix} 1.02384375 \\ 1.94722425 \\ 3.0276599375 \end{Bmatrix}$$

6.3.3 SOR Yöntemi (Successive Over Relaxation Method):

Gauss-Seidel yönteminin biraz değiştirilmiş halidir. Bu yöntemde de doğrudan çözüm elde edilmez. Fakat başlangıçta bilinmeyenlere bir değer verilir ve tekrarlama (iterasyon) yapıldıkça, bilinmeyenler gerçek değere doğru yaklaşmaya başlar. Bunun için lineer olarak verilen,

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{108}$$

denkleminin tekrarlama (iterasyon) ile çözülebilmesi için A matrisini 3 farklı matrisin toplamı olarak yazılmalıdır.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ [D] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},\ [L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix},\ [U] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] = [D] + [L] + [U] \rightarrow ([D] + [L] + [U])\{x\} = \{b\} \rightarrow ([D] + [L])\{x\} = (-[U])\{x\} + \{b\}$$

Denklemin her iki tarafı ivmelendirme değişkeni ω ile çarpıldığında,

$$\omega \cdot ([D] + [L])\{x\} = \omega \cdot (-[U])\{x\} + \omega \cdot \{b\}$$

Zekeriya Girgin

olur. Elde edilen denklemin her iki tarafına $(1-\omega)\cdot[D]\{x\}$ terimi ilave edildiğinde,

$$\omega\cdot([D]+[L])\{x\}+(1-\omega)\cdot[D]\{x\}=\omega\cdot(-[U])\{x\}+\omega\cdot\{b\}+(1-\omega)\cdot[D]\{x\}$$

$$\cancel{\omega\cdot[D]\{x\}}+\omega\cdot[L]\{x\}+[D]\{x\}-\cancel{\omega\cdot[D]\{x\}}=\left((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U]\right)\{x\}+\omega\cdot\{b\}$$

$$([D]+\omega\cdot[L])\{x\}=\left(-\omega\cdot[U]+(1-\omega)\cdot[D]\right)\{x\}+\omega\cdot\{b\}$$

$$([D]+\omega\cdot[L])^{-1}([D]+\omega\cdot[L])\{x\}=([D]+\omega\cdot[L])^{-1}\left(-\omega\cdot[U]+(1-\omega)\cdot[D]\right)\{x\}+\omega\cdot([D]+\omega\cdot[L])^{-1}\{b\}$$

$$\{x\}=([D]+\omega\cdot[L])^{-1}\left((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U]\right)\{x\}+\omega\cdot\left[D+\omega\cdot L\right]^{-1}\{b\} \qquad (109)$$

$$\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\} \qquad (110)$$

olur. Buradaki [T] matrisi ve {c} vektörü aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$[T]=([D]+\omega\cdot[L])^{-1}\left((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U]\right),\quad \{c\}=\omega\cdot\left[D+\omega\cdot L\right]^{-1}\{b\} \qquad (111)$$

Buradaki ivmelendirme değişkeni ω , $(0<\omega<1)$ olduğunda **SUR** metodu (**S**uccessive **U**nder **R**elaxation method) olarak adlandırılır ve ω değeri $(1<\omega<2)$ olduğunda, **SOR** metodu (**S**uccessive **O**ver **R**elaxation method) olarak adlandırılır.

Genelde ivmelendirme parametresi ω=1.25 olarak alınır Gerçek değerini bulmak için aşağıdaki denklemden yararlanılır.

$$\boxed{\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho_{max})^2}}}$$

Aslında Gauss-Seidel metodu, SOR metodunun özel halidir. Yani ω=1 alındığında, SOR metodu Gauss-Seidel metoduna dönüşür. Aşağıda bu yöntemle ilgili açıklamalı misaller verilmiştir.

6.3.3.1 Misal:

$\begin{bmatrix}3 & 1 & -6\\ 1 & -5 & 4\\ -7 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\ -3\\ -10\end{Bmatrix}$ lineer denklem sistemini, tekrarlama (iterasyon) metotlarından **SOR** yöntemi ile, **ω=1.2** için ve $\{x\}_0=\begin{Bmatrix}2.0\\ 1.5\\ 1.0\end{Bmatrix}$ başlangıç değerlerini kullanarak, üçüncü tekrarlamaya kadar, {x} bilinmeyen değerlerini hesaplayınız.

Çözüm : verilen matris eşitliğinde ilk yapılacak işlem, köşegen üzerindeki değerler mutlak değerce en büyük olacak şekilde düzenlenmelidir. Bu işlem yapılır iken eşitliğin diğer tarafındaki değerler de beraber yer değiştirilmelidir.

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -6\\ 1 & -5 & 4\\ -7 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\ -3\\ -10\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-7 & 5 & 1\\ 1 & -5 & 4\\ 3 & 1 & -6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-10\\ -3\\ 5\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{array}{l}-7\cdot x_1+5\cdot x_2+1\cdot x_3=-10\\ 1\cdot x_1-5\cdot x_2+4\cdot x_3=-3\\ 3\cdot x_1+1\cdot x_2-6\cdot x_3=5\end{array}$$

Zekeriya Girgin

$\boxed{x_1^{new} = \frac{5 \cdot x_2 + x_3 + 10}{7}}$ $\boxed{x_2^{new} = \frac{x_1 + 4 \cdot x_3 + 3}{5}}$ $\boxed{x_3^{new} = \frac{3 \cdot x_1 + x_2 - 5}{6}}$

$$x_1^{new} = \frac{5 \cdot x_2 + x_3 + 10}{7} \rightarrow x_1^{new} = \frac{5 \cdot 1.5 + 1.0 + 10}{7} = \frac{18.5}{7} \rightarrow \boxed{x_1^{new} = 2.642857} \rightarrow \boxed{x_i = \omega \cdot x_i^{new} + (1-\omega) \cdot x_i^{old}}$$

$$x_1 = \omega \cdot x_1^{new} + (1-\omega) \cdot x_1^{old} \rightarrow x_1 = 1.2 \cdot 2.642857 + (1-1.2) \cdot 2.0 \rightarrow \boxed{x_1 = 2.771429}$$

x_1 için elde edilen son değer, diğer eşitliklerde hemen kullanılır. Aynı işlemler sırasıyla x_2 ve x_3 bilinmeyenleri içinde yapıldığında birinci tekrarlama tamamlanmış olur.

$$x_2^{new} = \frac{x_1 + 4 \cdot x_3 + 3}{5} \rightarrow x_2^{new} = \frac{2.771429 + 4 \cdot 1.0 + 3}{5} \rightarrow \boxed{x_2^{new} = 1.954286} \rightarrow x_2 = \omega \cdot x_2^{new} + (1-\omega) \cdot x_2^{old}$$

$$x_2 = 1.2 \cdot 1.954286 + (1-1.2) \cdot 1.5 \rightarrow \boxed{x_2 = 2.045143}$$

$$x_3^{new} = \frac{3 \cdot x_1 + x_2 - 5}{6} \rightarrow x_3^{new} = \frac{3 \cdot 2.771429 + 2.045143 - 5}{6} \rightarrow \boxed{x_3^{new} = 0.893238}$$

$$x_3 = \omega \cdot x_3^{new} + (1-\omega) \cdot x_3^{old} \rightarrow x_3 = 1.2 \cdot 0.893238 + (1-1.2) \cdot 1.0 \rightarrow \boxed{x_3 = 0.871886}$$

Böylece birinci tekrarlama tamamlanmış olur. İkinci tekrarlama için, $\{x\}_1 = \begin{Bmatrix} 2.771429 \\ 2.045143 \\ 0.871886 \end{Bmatrix}$ başlangıç değerleri kullanılır ve yukarıdaki işlem sırası aynen tekrarlanır. Bu işlem sadece x_1 için tekrar gösterilecek;

$$x_1^{new} = \frac{5 \cdot x_2 + x_3 + 10}{7} \rightarrow x_1^{new} = \frac{5 \cdot 2.045143 + 0.871886 + 10}{7} \rightarrow \boxed{x_1^{new} = 3.013943}$$

$$x_1 = \omega \cdot x_1^{new} + (1-\omega) \cdot x_1^{old} \rightarrow x_1 = 1.2 \cdot 3.013943 + (1-1.2) \cdot 2.771429 \rightarrow \boxed{x_1 = 3.062446}$$

İterasyon sayısı		Eski Değer	Yeni Değer	Son Değer
1	x_1	2.000000	2.642857	2.771429
	x_2	1.500000	1.954286	2.045143
	x_3	1.000000	0.893238	0.871886
2	x_1	2.771429	3.013943	3.062446
	x_2	2.045143	1.909998	1.882969
	x_3	0.871886	1.011718	1.039684
3	x_1	3.062446	2.922075	2.894001
	x_2	1.882969	2.010547	2.036063
	x_3	1.039684	0.953011	0.935677

Zekeriya Girgin

45	x_1	3.000000	3.000000	3.000000
	x_2	2.000000	2.000000	2.000000
	x_3	1.000000	1.000000	1.000000
46	x_1	3.000000	3.000000	3.000000
	x_2	2.000000	2.000000	2.000000
	x_3	1.000000	1.000000	1.000000

Tablodan da görüldüğü gibi 45. Tekrarlamadan sonra değerler değişmemektedir. Dolayısıyla bilinmeyen {x} değerleri bunlardır. Aynı problem bilgisayar programı ile de çözülebilir. Bunun için;

$$\begin{bmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -10 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$, burada $[A]=\begin{bmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\{b\}=\begin{Bmatrix} -10 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix}$ ve $\{x\}_0=\begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır.

$$[D]=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},\ [U]=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ [L]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A]=[D]+[U]+[L] \rightarrow [A]\{x\}=\{b\} \rightarrow [A]=[D]+[L]+[U] \rightarrow ([D+L+U])\{x\}=\{b\}$$

$$[D]\{x\}=(-[L]-[U])\{x\}+\{b\} \rightarrow [D]^{-1}[D]\{x\}=[D]^{-1}(-[L]-[U])\{x\}+[D]^{-1}\{b\}$$

$\{x\}=[D]^{-1}(-[L]-[U])\{x\}+[D]^{-1}\{b\}$ yazılabilir. Burada her değer ω ile çarpıldığında;

$\boxed{[T]=\omega\cdot[D]^{-1}(-[L]-[U])}$, $\boxed{\{c\}=\omega\cdot[D]^{-1}\{b\}}$ elde edilir.

[A] matrisinin özdeğerleri;

$$\begin{bmatrix} (-7-\lambda) & 5 & 1 \\ 1 & (-5-\lambda) & 4 \\ 3 & 1 & (-6-\lambda) \end{bmatrix}=\lambda^3+18\cdot\lambda^2+95\cdot\lambda+76=0 \rightarrow \lambda^3+18\cdot\lambda^2+95\cdot\lambda+76=0$$

$\lambda_1=-0.3657983051$, $\lambda_2=0.03479116643$ ve $\lambda_3=0.6286071386$

Mutlak değerce en büyük olan $\lambda_3=0.6286071386$ değeri kullanılarak ω katsayısı hesaplanır.

$$\rho(A)=\max|\lambda| \rightarrow \rho_{max}=\max|\lambda| \rightarrow \rho_{max}=0.6286071386$$

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho_{max})^2}} \rightarrow \omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-(0.6286071386)^2}} \quad \omega=1.20377661238703 \rightarrow \boxed{\omega\approx1.2}$$ olarak bu denklem sisteminde kullanıldı. Yani aktif ve hızlı bir hesaplama için ω katsayının ne olacağı bu şekilde yaklaşık olarak hesaplanmalıdır. Fakat burada biraz daha ince hesap yapıldığında (burada açıklanması biraz uzun olduğu için verilmedi.) daha uygun ω değerinin $\boxed{\omega\cong1.146582}$ olduğu görülür.

Zekeriya Girgin

$$\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\}$$

$$[T]=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.72 & 0.24\\ -0.08 & 0.088 & 0.896\\ -0.108 & 0.2688 & 0.4096\end{bmatrix},\ \{c\}=\begin{Bmatrix}-0.96\\ -0.784\\ 1.3416\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.72 & 0.24\\ -0.08 & 0.088 & 0.896\\ -0.108 & 0.2688 & 0.4096\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2.0\\ 1.5\\ 1.0\end{Bmatrix}_0+\begin{Bmatrix}-0.96\\ -0.784\\ 1.3416\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}2.771429\\ 2.045143\\ 0.871886\end{Bmatrix}$$

Dikkat edilirse $[T]$ matrisi ve $\{c\}$ vektörünün değerleri, her tekrarlama için değişmeden aynen kullanılmaktadır. Buradan da aynı sonuçlar elde edilir.

6.3.3.2 Misal:

Aşağıda verilen matris eşitliğinde, x bilinmeyenlerini $\omega=1.25$ alarak SOR yöntemi ile 10. iterasyona kadar hesaplayınız.

$$\begin{bmatrix}10 & -1 & 2\\ -1 & 11 & -1\\ 2 & -1 & 10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6\\ 22\\ -10\end{Bmatrix}$$, burada $[A]=\begin{bmatrix}10 & -1 & 2\\ -1 & 11 & -1\\ 2 & -1 & 10\end{bmatrix}$ ve $\{b\}=\begin{Bmatrix}6\\ 22\\ -10\end{Bmatrix}$ $\{x\}_0=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır

Çözüm 1: (Bilgisayara uygun çözümdür.) Denklem (109) ve (110) ile verilen matrisler elde edilerek yapılan çözümdür.

$$[D]=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix},\ [U]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ [L]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix},\ \{b\}=\begin{Bmatrix}6\\ 22\\ -10\end{Bmatrix}$$

$$[T]=([D]+\omega\cdot[L])^{-1}\left((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U]\right)\rightarrow[T]=\begin{bmatrix}-0.25 & 0.125 & -0.250\\ 0.02841 & -0.2358 & 0.08523\\ 0.05895 & -0.06072 & -0.1768\end{bmatrix}$$

ve $\{c\}=\omega\cdot\left[D+\omega\cdot L\right]^{-1}\{b\}\rightarrow\{c\}=\begin{Bmatrix}0.75\\ 2.585\\ -1.114\end{Bmatrix}$ olarak hesaplanır. 1. iterasyon için, başlangıç değerlerinin hepsi de sıfır alındığından,

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{bmatrix}-0.25 & 0.125 & -0.250\\ 0.02841 & -0.2358 & 0.08523\\ 0.05895 & -0.06072 & -0.1768\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.75\\ 2.585\\ -1.114\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0.75\\ 2.585\\ -1.114\end{Bmatrix}$$ olarak hesaplanır.

2. ve diğer iterasyon değerleri aşağıda verilmiştir.

Zekeriya Girgin

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1.164 \\ 1.859 \\ -1.030 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 0.9489 \\ 2.026 \\ -0.9765 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_4 = \begin{Bmatrix} 1.010 \\ 1.997 \\ -1.009 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_5 = \begin{Bmatrix} 0.9993 \\ 2.000 \\ -0.9977 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_6 = \begin{Bmatrix} 0.9995 \\ 2.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_7 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_8 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_9 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{10} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix}$$

Görüldüğü gibi 8. iterasyondan sonra bilinmeyen {x} vektörü değerleri gittikçe doğruya yaklaşmaktadır. Buradaki işlemlerde 4 hane gösterilmiştir.

Çözüm 2: Aynı işlem el ile aşağıdaki gibi de hesaplanabilir.

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 11 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 22 \\ -10 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 10\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 6 \\ -1\cdot x_1 + 11\cdot x_2 - 1\cdot x_3 = 22 \\ 2\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 10\cdot x_3 = -10 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 10\cdot x_1 = 1\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 6 \\ 11\cdot x_2 = x_1 + x_3 + 22 \\ 10\cdot x_3 = -2\cdot x_1 + x_2 - 10 \end{matrix}$$

$x_1 = \dfrac{x_2 - 2\cdot x_3 + 6}{10}$, $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3 + 22}{11}$, $x_3 = \dfrac{-2\cdot x_1 + x_2 - 10}{10}$ olarak temel formül edilmiş olur. Buradan 1. iterasyon için, bütün {x} değerleri sıfır olarak girilir

$$x_1 = \frac{0 - 2\cdot 0 + 6}{10} \rightarrow x_1 = 0.6 \rightarrow x_i = \omega\cdot x_i^{new} + (1-\omega)\cdot x_i^{old}$$

$$x_1 = \omega\cdot x_1^{new} + (1-\omega)\cdot x_1^{old} \rightarrow x_1 = 1.25\cdot 0.6 + (1-1.25)\cdot 0$$

$\boxed{x_1 = 0.75}$ → 1. iterasyon sonucunda elde edilen x_1 değeridir.

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3 + 22}{11} \rightarrow x_2 = \frac{0.75 + x_3 + 22}{11} \rightarrow x_2 = \frac{0.75 + 0 + 22}{11} = 2.068181818$$

$$x_2 = 2.068181818 \rightarrow x_2 = \omega\cdot x_2^{new} + (1-\omega)\cdot x_2^{old} \rightarrow x_2 = 1.25\cdot 2.068181818 - 0.25\cdot 0$$

$\boxed{x_2 = 2.585227273}$ → 1. iterasyon sonucunda elde edilen x_2 değeridir. Benzer işlemler x_3 için yapıldığında,

$$x_3 = \frac{-2\cdot x_1 + x_2 - 10}{10} \rightarrow x_3 = \frac{-2\cdot 0.75 + 2.585227273 - 10}{10} \rightarrow x_3 = -0.8914772728$$

$$x_3 = \omega\cdot x_3^{new} + (1-\omega)\cdot x_3^{old} \rightarrow x_3 = 1.25\cdot(-0.8914772728) - 0.25\cdot 0 \rightarrow \boxed{x_3 = -1.114346591}$$

olarak hesaplanır. 2. iterasyon için kullanılacak değerler, 1. iterasyon sonucunda elde edilen son değerlerdir. Yani $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 2.585 \\ -1.114 \end{Bmatrix}$ değerleri kullanılır. Yine aynı şekilde önce,

$x_1 = \dfrac{x_2 - 2\cdot x_3 + 6}{10}$, $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3 + 22}{11}$, $x_3 = \dfrac{-2\cdot x_1 + x_2 - 10}{10}$ temel formülleri kullanılacak. Yani,

$$x_1 = \frac{2.585 - 2\cdot(-1.114) + 6}{10} \rightarrow \boxed{x_1 = 1.0813}$$

$$x_i = \omega\cdot x_i^{new} + (1-\omega)\cdot x_i^{old} \rightarrow x_1 = 1.25\cdot(1.0813) + (1-1.25)\cdot 0.75$$

Zekeriya Girgin

$x_1 = 1.164$ → 2. iterasyon sonucunda elde edilen x_1 değeridir. Benzer işlemler diğerleri için de uygulanır.

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3 + 22}{11} \rightarrow x_2 = \frac{1.164 + (-1.114) + 22}{11} \rightarrow x_2^{new} = 2.00454$$

$$x_2 = \omega \cdot x_2^{new} + (1-\omega)\cdot x_2^{old} \rightarrow \quad x_2 = 1.25 \cdot 2.00454 + (1-1.25)\cdot 2.585 \rightarrow \boxed{x_2 = 1.85936}$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi her iki usul ile hesaplanan değerler birbirinin aynısıdır.

6.3.3.3 Misal:

Aşağıdaki matris eşitliğinde, {x} bilinmeyen vektörü için başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak ve $\omega = 1.1$ alarak SOR yöntemi ile 12. iterasyona kadar hesaplayınız.

$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix}$, burada $[A] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\{b\} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır

Çözüm: ilk önce [A] matrisi köşegen olarak dominant hale getirilmelidir. Bunun için ilk önce 2. satır ile 3. satır yer değiştirildi.

$$[A] = \begin{matrix} \\ \downarrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix} \qquad (112)$$

2. satırı daha da dominant hale getirmek için; 1. satırın elemanları 1 ile çarpılıp 2. satır ile toplandı ve bu değerler 2. satıra yazıldı. Sembolik olarak aşağıda gösterilmiştir. Fakat bu işlem ille de şart değildir. Böyle olursa daha da hızlı kök değerine yaklaşır. Sizin sınavlarda bunu yapmanız gerekmez. Artık yeni kullanılacak matris eşitliği aşağıdaki gibidir

$$[A] = \begin{matrix} 1\times \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 27 \\ 20 \end{Bmatrix} \rightarrow \{x\}_{i+1} = [T]\{x\}_i + \{c\}$$

Aşağıdaki hesaplar, Denklem (112) esas alınarak yapılmıştır.

$\{x\}_{i+1} = [T]\{x\}_i + \{c\}$ ve $[T] = (([D] + \omega \cdot [L])^{-1}((1-\omega)\cdot[D] - \omega\cdot[U])$ $\{c\} = \omega \cdot [D + \omega \cdot L]^{-1}\{b\}$ ile tanımlıdır. Burada değerler yerine yazıldığında;

$$[T] = \begin{bmatrix} -0.1000 & -0.44 & -0.22 \\ 0.01571 & -0.03086 & -0.5940 \\ 0.04204 & 0.2675 & 0.5111 \end{bmatrix} \text{ ve } \{c\} = \omega \cdot [D - \omega \cdot L]^{-1}\{b\} = \begin{Bmatrix} 2.640 \\ 3.828 \\ 0.8899 \end{Bmatrix}$$

1. iterasyon sonunda,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -0.1000 & -0.44 & -0.22 \\ 0.01571 & -0.03086 & -0.5940 \\ 0.04204 & 0.2675 & 0.5111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.640 \\ 3.828 \\ 0.8899 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 2.640 \\ 3.828 \\ 0.8899 \end{Bmatrix}$$ olarak bulunur.

Zekeriya Girgin

Diğer iterasyon sonuçları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0.4959 \\ 3.223 \\ 2.479 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 0.6269 \\ 2.264 \\ 3.040 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_4 = \begin{Bmatrix} 0.9126 \\ 1.962 \\ 3.075 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_5 = \begin{Bmatrix} 1.009 \\ 1.955 \\ 3.025 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_6 = \begin{Bmatrix} 1.013 \\ 1.987 \\ 3.001 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_7 = \begin{Bmatrix} 1.004 \\ 2.000 \\ 2.998 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_8 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.002 \\ 2.999 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_9 = \begin{Bmatrix} 0.9996 \\ 2.001 \\ 3.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{10} = \begin{Bmatrix} 0.9998 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{11} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{12} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{13} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{Bmatrix}$$

11. iterasyondan sonra değerler değişmemektedir.

6.3.3.4 Misal:

Aşağıdaki matris eşitliğinde, {x} bilinmeyen vektörü için başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak ve ω=1.2 alarak SOR yöntemi ile 3. iterasyona kadar hesaplayınız.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{Bmatrix}$, burada $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\{b\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır

Çözüm: ilk önce [A] matrisi köşegen olarak dominant hale getirilmelidir. Bunun için ilk önce 1. satır ile 3. satır yer değiştirildi ve köşegen elemanları *mutlak değerce* en büyük hale getirildi.

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \\ \uparrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7 \\ 5 \\ 10 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$\{x\}_{i+1} = [T]\{x\}_i + \{c\}$ ve $[T] = (([D] + \omega \cdot [L])^{-1}((1-\omega) \cdot [D] - \omega \cdot [U])$, $\{c\} = \omega \cdot [D + \omega \cdot L]^{-1}\{b\}$ ile tanımlıdır.

Burada değerler yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} -7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -7 \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &= 5 \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 &= 10 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 7 \cdot x_1 &= 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 7 \\ 5 \cdot x_2 &= -2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3 + 5 \\ 6 \cdot x_3 &= -1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 10 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Tekrarlamada (iterasyonda) kullanılacak denklemler aşağıda verilmiştir.

$$x_1 = \boxed{\frac{2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 7}{7}}, \quad x_2 = \boxed{\frac{-2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3 + 5}{5}}, \quad x_3 = \boxed{\frac{-1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 10}{6}}, \quad x_i = \omega \cdot x_i^{new} + (1-\omega) \cdot x_i^{old}$$

Bu denklemler ile elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde gösterilmiştir.

$$x_1 = \frac{2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 7}{7} = \frac{2 \cdot 1.0 + 1 \cdot 1.5 + 7}{7} = 1.5 \qquad \rightarrow x_1 = \omega \cdot x_1^{new} + (1-\omega) \cdot x_1^{old}$$

Zekeriya Girgin

$x_1 = 1.2 \cdot 1.5 - 0.2 \cdot 0.5 = 1.7 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1.7}$

$x_2 = \dfrac{-2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_3 + 5}{5} = \dfrac{-2 \cdot 1.7 - 4 \cdot 1.5 + 5}{5} = \text{-}0.88 \rightarrow x_2 = \omega \cdot x_2^{new} + (1-\omega) \cdot x_2^{old} \rightarrow$

$x_2 = 1.2 \cdot (-0.88) - 0.2 \cdot 1.0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = \text{-}1.256}$

$x_3 = \dfrac{-1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 10}{6} == \dfrac{-1 \cdot 1.7 - 3 \cdot (-1.256) + 10}{6} = 2.0113 \rightarrow x_3 = \omega \cdot x_3^{new} + (1-\omega) \cdot x_3^{old}$

$x_3 = 1.2 \cdot 2.0113 - 0.2 \cdot 1.5 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 2.1136}$

İterasyon sayısı		Eski Değer	Yeni Değer	Son Değer
1	x_1	0.5	1.5	1.7
	x_2	1.0	-0.88	-1.256
	x_3	1.5	2.0113	2.1136
2	x_1	1.7	0.9431	0.7917
	x_2	-1.256	-1.0076	-0.9579
	x_3	2.1136	2.0137	1.9937
3	x_1	0.7917	1.0111	1.0550
	x_2	-0.9579	-1.0169	-1.0288
	x_3	1.9937	2.0052	2.0075

Tekrarlama (iterasyon) artırıldığında, x değerleri gerçek olan

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ değerlerine doğru yaklaşmaktadır.

6.3.3.5 Misal:

Aşağıdaki matris eşitliğinde, {x} bilinmeyen vektörü için başlangıçta $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \end{Bmatrix}$ değerlerini kullanarak ve ω=1.2 alarak SOR yöntemi ile 4. iterasyona kadar hesaplayınız.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{Bmatrix}$, burada $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\{b\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{Bmatrix}$ ile tanımlıdır

Zekeriya Girgin

Çözüm: ilk önce [A] matrisi köşegen olarak dominant hale getirilmelidir. Bunun için ilk önce 1. satır ile 3. satır yer değiştirildi ve köşegen elemanları *mutlak değerce* en büyük hale getirildi.

$$\begin{array}{c}\downarrow\\ \\ \uparrow\end{array}\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 5 & 4\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}10\\ 5\\ 7\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}7 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7\\ 5\\ 10\end{Bmatrix}\rightarrow$$

$\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\}$ ve $[T]=(([D]+\omega\cdot[L])^{-1}((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U])$, $\{c\}=\omega\cdot[D+\omega\cdot L]^{-1}\{b\}$ ile tanımlıdır. Burada değerler yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}&7\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3=7 & & 7\cdot x_1=2\cdot x_2+1\cdot x_3+7\\ &2\cdot x_1+5\cdot x_2+4\cdot x_3=5 &\rightarrow\ & 5\cdot x_2=-2\cdot x_1-4\cdot x_3+5 \quad\rightarrow\\ &1\cdot x_1+3\cdot x_2+6\cdot x_3=10 & & 6\cdot x_3=-1\cdot x_1-3\cdot x_2+10\end{aligned}$$

İterasyonda kullanılacak denklemler aşağıda verilmiştir.

$$x_1=\frac{-2\cdot x_2-1\cdot x_3+7}{7},\quad x_2=\frac{-2\cdot x_1-4\cdot x_3+5}{5},\quad x_3=\frac{-1\cdot x_1-3\cdot x_2+10}{6}\ ,\ x_i=\omega\cdot x_i^{new}+(1-\omega)\cdot x_i^{old}$$

Bu denklemler ile elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde gösterilmiştir.

$$x_1=\frac{-2\cdot x_2-1\cdot x_3+7}{7}=\frac{-2\cdot 1.0-1\cdot 1.5+7}{7}=0.5 \quad\rightarrow\quad x_1=\omega\cdot x_1^{new}+(1-\omega)\cdot x_1^{old}$$

$$x_1=1.2\cdot 0.5-0.2\cdot 0.5=0.5 \quad\rightarrow\quad \boxed{x_1=0.5}$$

$$x_2=\frac{-2\cdot x_1-4\cdot x_3+5}{5}=\frac{-2\cdot 0.5-4\cdot 1.5+5}{5}=-0.4 \quad\rightarrow\quad x_2=\omega\cdot x_2^{new}+(1-\omega)\cdot x_2^{old}$$

$$x_2=1.2\cdot(-0.4)-0.2\cdot 1.0 \quad\rightarrow\quad \boxed{x_2=-0.68}$$

$$x_3=\frac{-1\cdot x_1-3\cdot x_2+10}{6}==\frac{-1\cdot 0.5-3\cdot(-0.68)+10}{6}=1.9233 \quad\rightarrow\quad x_3=\omega\cdot x_3^{new}+(1-\omega)\cdot x_3^{old}$$

$$x_3=1.2\cdot 1.9233-0.2\cdot 1.5 \quad\rightarrow\quad \boxed{x_3=2.0080}$$

İterasyon sayısı		Eski Değer	Yeni Değer	Son Değer
1	x_1	0.5000	0.5000	0.5000
	x_2	1.0000	-0.4000	-0.6800
	x_3	1.5000	1.9233	2.0080
2	x_1	0.5000	0.9074	0.9889
	x_2	-0.6800	-1.0020	-1.0664
	x_3	2.0080	2.0350	2.0404
3	x_1	0.98891429	1.013184	1.018037

Zekeriya Girgin

	x_2	-1.06635886	-1.039561	-1.034201
	x_3	2.04043246	2.014094	2.008827
4	x_1	1.01803747	1.008511	1.006606
	x_2	-1.03420137	-1.009704	-1.004804
	x_3	2.00882684	2.001301	1.999796

İterasyon artırıldığında, x değerleri gerçek olan

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ değerlerine doğru yaklaşmaktadır.

6.3.3.6 Misal:

$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ -9 \\ -8 \end{Bmatrix}$ lineer denklem sistemini, tekrarlama (iterasyon) metotlarından

<u>SOR</u> yöntemi ile, **ω=1.11** ve $\{x\}_0 = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$ başlangıç değerlerini kullanarak, **3.** tekrarlamaya kadar {x} bilinmeyen vektörünü ayrıntılı olarak tablo haline hesaplayınız.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ -9 \\ -8 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 14 \\ -9 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -7\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = -8 \\ 1\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 14 \\ 4\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 6\cdot x_3 = -9 \end{matrix}$

$\boxed{x_1^{new} = \dfrac{3\cdot x_2 + x_3 + 8}{7}}$ $\boxed{x_2^{new} = \dfrac{x_1 + 4\cdot x_3 - 14}{5}}$ $\boxed{x_3^{new} = \dfrac{4\cdot x_1 + x_2 + 9}{6}}$ $\{x\}_0 = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$

$x_1^{new} = \dfrac{3\cdot x_2 + x_3 + 8}{7} \rightarrow x_1^{new} = \dfrac{3\cdot 0.5 + 1 + 8}{7} \rightarrow x_1^{new} = 1.5 \rightarrow x_1 = \omega\cdot x_1^{new} + (1-\omega)\cdot x_1^{old} \rightarrow$

$x_1 = 1.11\cdot 1.5 + (1-1.11)\cdot 0 \rightarrow \boxed{x_1 = 1.665}$, $x_2^{new} = \dfrac{x_1 + 4\cdot x_3 - 14}{5} \rightarrow x_2^{new} = \dfrac{1.665 + 4\cdot 1 - 14}{5} \rightarrow x_2^{new} = -1.667$

$x_2 = \omega\cdot x_2^{new} + (1-\omega)\cdot x_2^{old} \rightarrow x_2 = 1.11\cdot(-1.667) + (1-1.11)\cdot 0.5 \rightarrow \boxed{x_2 = -1.90537}$

$x_3^{new} = \dfrac{4\cdot x_1 + x_2 + 9}{6} \rightarrow x_3^{new} = \dfrac{4\cdot 1.665 + (-1.90537) + 9}{6} \rightarrow x_3^{new} = 2.292438$

$x_3 = \omega\cdot x_3^{new} + (1-\omega)\cdot x_3^{old} \rightarrow x_3 = 1.11\cdot 2.292438 + (1-1.11)\cdot 1 \rightarrow \boxed{x_3 = 2.434607}$

İkinci tekrarlama için başlangıç değeri $\{x\}_0 = \begin{Bmatrix} 1.66500 \\ -1.90537 \\ 2.434607 \end{Bmatrix}$ olarak kullanılacaktır.

Zekeriya Girgin

$x_1^{new}=\dfrac{3\cdot x_2+x_3+8}{7}$ → $x_1^{new}=\dfrac{3\cdot(-1.90537)+2.434607+8}{7}$ → $x_1^{new}=0.674071$ → $x_1=\omega\cdot x_1^{new}+(1-\omega)\cdot x_1^{old}$

$x_1=1.11\cdot 0.674071+(1-1.11)\cdot 1.665$ → $\boxed{x_1=0.565069}$, $x_2^{new}=\dfrac{x_1+4\cdot x_3-14}{5}$

$x_2^{new}=\dfrac{0.565069+4\cdot 2.434607-14}{5}$ → $x_2^{new}=-0.739301$ → $x_2=\omega\cdot x_2^{new}+(1-\omega)\cdot x_2^{old}$

$x_2=1.11\cdot(-0.739301)-0.11\cdot(-1.90537)$ → $\boxed{x_2=-0.611033}$

Benzer şekilde diğerleri de hesaplandığında, aşağıda tabloda verilen sonuçlar elde edilir.

Tek. Sayısı		Eski Değer	Yeni Değer	Son Değer
1	x_1	0.000000	1.500000	1.665000
	x_2	0.500000	-1.667000	-1.905370
	x_3	1.000000	2.292438	2.434607
2	x_1	1.665000	0.674071	0.565069
	x_2	-1.905370	-0.739301	-0.611033
	x_3	2.434607	1.774874	1.702303
3	x_1	0.565069	1.124172	1.185673
	x_2	-0.611033	-1.201023	-1.265922
	x_3	1.702303	2.079462	2.120949

6.3.3.7 Misal:

$\begin{bmatrix}-5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\-7\\1\end{Bmatrix}$ ile verilen lineer denklem sistemini, tekrarlama metotlarından **SOR** yöntemi ile, **ω=1.2** için ve $\{x\}_0=\begin{Bmatrix}0.5\\1.5\\2.5\end{Bmatrix}$ başlangıç değerlerini kullanarak, 1. ve 2. iterasyon için, {x} bilinmeyen vektörünü ayrıntılı olarak hesaplayınız.

Çözüm: ilk önce [A] matrisi köşegen olarak dominant hale getirilmelidir. Bunun için ilk önce 2. satır ile 3. satır yer değiştirilerek, köşegen elemanları *mutlak değerce* en büyük hale getirilmelidir.

$$\begin{matrix}\\ \downarrow\\ \uparrow\end{matrix}\begin{bmatrix}-5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\-7\\1\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\1\\-7\end{Bmatrix}$$

$\{x\}_{i+1}=[T]\{x\}_i+\{c\}$ ve $[T]=(([D]+\omega\cdot[L])^{-1}((1-\omega)\cdot[D]-\omega\cdot[U])$, $\{c\}=\omega\cdot[D+\omega\cdot L]^{-1}\{b\}$ ile tanımlıdır. Burada değerler yerine yazıldığında;

$$-5\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3=4 \qquad 5\cdot x_1=+3\cdot x_2+1\cdot x_3-4$$
$$1\cdot x_1-3\cdot x_2+2\cdot x_3=1 \quad \rightarrow \quad 3\cdot x_2=1\cdot x_1+2\cdot x_3-1$$
$$1\cdot x_1+2\cdot x_2-4\cdot x_3=-7 \qquad 4\cdot x_3=1\cdot x_1+2\cdot x_2+7$$

Tekrarlamada kullanılacak denklemler aşağıda verilmiştir.

$$x_1=\frac{3\cdot x_2+1\cdot x_3-4}{5},\quad x_2=\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_3-1}{3},\quad x_3=\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_2+7}{4}\ ,\ x_i=\omega\cdot x_i^{new}+(1-\omega)\cdot x_i^{old}$$

Bu denklemler ile elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde gösterilmiştir.

$$x_1=\frac{3\cdot x_2+1\cdot x_3-4}{5}=\frac{3\cdot 1.5+1\cdot 2.5-4}{5}=0.6 \quad \rightarrow \quad x_1=\omega\cdot x_1^{new}+(1-\omega)\cdot x_1^{old}$$

$$x_1=1.2\cdot 0.6-0.2\cdot 1.5=0.62 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1=0.62}$$

$$x_2=\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_3-1}{3}=\frac{1\cdot 0.62+2\cdot 2.5-1}{3}=1.54 \rightarrow x_2=\omega\cdot x_2^{new}+(1-\omega)\cdot x_2^{old}$$

$$x_2=1.2\cdot(1.54)-0.2\cdot 1.5 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2=1.548}$$

$$x_3=\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_2+7}{4}=\frac{1\cdot 0.62+2\cdot(1.548)+7}{4}=2.679 \rightarrow x_3=\omega\cdot x_3^{new}+(1-\omega)\cdot x_3^{old}$$

$$x_3=1.2\cdot 2.679-0.2\cdot 2.5 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3=2.7148}$$

Benzer işlemler ikinci ve diğer basamaklarda yapıldığında, aşağıdaki tablo elde edilir.

İterasyon sayısı		Eski Değer	Yeni Değer	Son Değer
1	x_1	0.5000	0.6000	0.62000
	x_2	1.5000	1.54	1.54800
	x_3	2.5000	2.679	2.7148
2	x_1	0.62000000	0.671760	0.682112
	x_2	1.54800	1.703904	1.735085
	x_3	2.71480	2.788070	2.802724
10	x_1	0.988673	0.992160	0.992857
	x_2	1.989400	1.992686	1.993343
	x_3	2.992601	2.994886	2.995343
20	x_1	0.999891	0.999925	0.999931
	x_2	1.999898	1.999930	1.999936
	x_3	2.999929	2.999951	2.999955

Zekeriya Girgin

32	x_1	1.000000	1.000000	1.000000
	x_2	2.000000	2.000000	2.000000
	x_3	3.000000	3.000000	3.000000
33	x_1	1.000000	1.000000	1.000000
	x_2	2.000000	2.000000	2.000000
	x_3	3.000000	3.000000	3.000000

Tablodan da görüldüğü gibi 32. tekrarlamadan sonra verilen kesirli kısım için sonuçların değişmediği görülmektedir.

7. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Yöntemler ile Çözümleri (Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations)

Adi Diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri yapılabilmektedir. Fakat birçok Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin analitik çözümleri olmadığı için ancak sayısal olarak çözülebilmektedir. Başlangıç değeri bilinen diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü, sınır değer problemlerine göre daha kolaydır. İlk olarak "Başlangıç Değer Problemleri" ni (Boundary Value Problem=BVP) çözen yöntemler ele alınacaktır.

7.1 Taylor Serisi Çözümü (Taylor Series Solution)

Daha önce verildiği gibi bir fonksiyonun Taylor serisine açılımı Denklem (13) ile verilmiştir. Birinci dereceden Adi Diferansiyel Denklem'i göz önüne alalım

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_i)=y_i$$

Bu denklem Taylor serisine açıldığında,

$$y(x)=\sum\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki terimler biraz açılıp ilk iki terim göz önüne alındığında,

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2+\frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3+\dots$$

ve burada,

$$\Delta x=(x_{i+1}-x_i),\quad \Delta x^2=(x_{i+1}-x_i)^2,\quad \Delta x^3=(x_{i+1}-x_i)^3,\quad \Delta x^n=(\Delta x)^n\neq\Delta(x^n)$$

ile tanımlıdır. Bu değerler yerine yazıldığında,

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)\cdot\Delta x+\frac{y''(x_i)}{2!}\cdot\Delta x^2+\frac{y'''(x_i)}{3!}\cdot\Delta x^3+\dots$$

Zekeriya Girgin

halini alır. Denklemde türevle ilgili sadece iki terim alınırsa, Euler Metodu olarak adlandırılır. Terim sayısı artırıldıkça (belirli bir sayıya kadar) Taylor serisi çözümü daha da gerçeğe doğru yakınsar.

7.1.1 Misal

$\frac{dy}{dx}=y\cdot x+x,\ \ y(0)=1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin $(x=0.2)$ deki sayısal değerini Taylor serisi ile ikinci mertebeden olan terimleri de hesaba katarak ve artış değerini $(h=\Delta x=0.1)$ alarak hesaplayınız

Çözüm: $\frac{dy}{dx}=y\cdot x+x \rightarrow \boxed{y'=y\cdot x+x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(y\cdot x+x) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=y''=y'\cdot x+1\cdot y+1 \rightarrow y''=y'\cdot x+y+1$$

$$y''=(y\cdot x+x)\cdot x+y+1 \rightarrow y''=y\cdot x^2+x^2+y+1 \rightarrow y''=(y+1)\cdot x^2+(y+1) \rightarrow y''=(y+1)\cdot x^2+(y+1) \rightarrow$$

$$\boxed{y''=(y+1)\cdot(x^2+1)}$$

Taylor serisinde değerler yerine yazıldığında,

$$y(x_{i+1})=y_i+y_i'\cdot\Delta x+\frac{y_i''}{2!}\cdot\Delta x^2+\ldots$$

$$y(x_{i+1})=y_i+(y_i\cdot x_i+x_i)\cdot\Delta x+\frac{\left((y_i+1)\cdot(x_i^2+1)\right)}{2!}\cdot\Delta x^2+\ldots$$

$$y(0.1)=y(0)+(y(0)\cdot 0+0)\cdot 0.1+\frac{\left((y(0)+1)\cdot(0^2+1)\right)}{2}\cdot 0.1^2+\ldots$$

$$y(0.1)=1+(1\cdot 0+0)\cdot 0.1+\frac{\left((1+1)\cdot(0^2+1)\right)}{2}\cdot 0.1^2+\ldots \rightarrow \boxed{y(0.1)=1.01}$$

$$y(0.2)=y(0.1)+(y(0.1)\cdot 0.1+0.1)\cdot 0.1+\frac{\left((y(0.1)+1)\cdot(0.1^2+1)\right)}{2}\cdot 0.1^2+\ldots$$

$$y(0.2)=1.01+(1.01+0.1)\cdot 0.1+\frac{\left((1.01+1)\cdot(0.1^2+1)\right)}{2}\cdot 0.1^2+\ldots \rightarrow \boxed{y(0.2)=1.040250500}$$

Analitik çözümü: $\boxed{y=-1+2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$ şeklindedir Δx aralığı azaltılıp, terim sayısı artırıldığında (daha yüksek merbeden türevler de hesaba ilave edildiği takdirde), gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilmektedir. Beşinci mertebeden terimler göz önüne alınıp $\Delta x=0.025$ alındığında aynı sonuçlar elde edildir.

7.1.2 Misal

$\frac{dy}{dx}-x\cdot y+x^2=1,\ \ y(0)=-1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin y(0.2) noktasındaki sayısal çözümünü h=Δx=0.1 için, Taylor serisi ile ikinci mertebene kadar olan terimleri dikkate alarak hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: $\frac{dy}{dx}-x\cdot y+x^2=1 \rightarrow \frac{dy}{dx}=x\cdot y+1-x^2 \rightarrow y'=x\cdot y+1-x^2$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(x\cdot y+1-x^2\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=y''=1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot x \rightarrow y''=y+x\cdot y'-2\cdot x$$

$$y''=y+x\cdot\left(x\cdot y+1-x^2\right)-2\cdot x \rightarrow y''=y+x^2\cdot y+x-x^3-2\cdot x \rightarrow y''=y+x^2\cdot y-x-x^3$$

Taylor serisinde değerler yerine yazıldığında,

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)\cdot\Delta x+\frac{y''(x_i)}{2!}\cdot\Delta x^2+\frac{y'''(x_i)}{3!}\cdot\Delta x^3+\ldots \rightarrow y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)\cdot h+\frac{y''(x_i)}{2!}\cdot h^2+\ldots$$

$$y(0.1)=y(0)+y'(0)\cdot h+\frac{y''(0)}{2!}\cdot h^2+\ldots \rightarrow$$

$$y(0.1)=y+\left(x\cdot y(0)+1-x^2\right)\cdot h+\frac{\left(y(0)+x^2\cdot y(0)-x-x^3\right)}{2}\cdot h^2+\ldots$$

$$y(0.1)=-1+\left(0\cdot(-1)+1-0^2\right)\cdot 0.1+\frac{\left(-1+0^2\cdot(-1)-0-0^3\right)}{2}\cdot 0.1^2+\ldots \rightarrow \boxed{y(0.1)=-0.905}$$

2. tekrarlama için;

$$y(0.2)=y(0.1)+\left(x\cdot y(0.1)+1-x^2\right)\cdot h+\frac{\left(y(0.1)+x^2\cdot y(0.1)-x-x^3\right)}{2}\cdot h^2+\ldots$$

$$y(0.2)=(-0.905)+\left(0.1\cdot(-0.905)+1-0.1^2\right)\cdot 0.1+\frac{\left((-0.905)+0.1^2\cdot(-0.905)-0.1-0.1^3\right)}{2}\cdot 0.01+\ldots$$

$$\boxed{y(0.2)=-0.8201252500}$$

7.1.3 Misal

$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x}$, $y(1)=0.5$ ile verilen diferansiyel denklemin y(1.5) için çözümünü h=0.1 aralık alarak Taylor serisinde üçüncü mertebene kadar olan terimleri dikkate alarak hesaplayınız.

Çözüm: $y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)\cdot\Delta x+\frac{y''(x_i)}{2!}\cdot\Delta x^2+\frac{y'''(x_i)}{3!}\cdot\Delta x^3+\ldots$

$$y(x+\Delta x)=y(x)+y'(x)\cdot\Delta x+\frac{y''(x)}{2!}\cdot\Delta x^2+\frac{y'''(x)}{3!}\cdot\Delta x^3+\ldots$$

$$y(1+0.1)=y(1)+y'(1)\cdot 0.1+\frac{y''(1)}{2!}\cdot 0.1^2+\frac{y'''(1)}{3!}\cdot 0.1^3+\ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}+1\right)\cdot x-1\cdot(y+x)}{x^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}+1\right)\cdot x-y-x}{x^2}=\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x-y}{x^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x-y}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x-y}{x^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{y+x}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-y}{x^2}=\frac{x}{x^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}}$$

Bundan sonra türev işlemi kısaca aşağıdaki gibi uygulanır.

Zekeriya Girgin

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \boxed{\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{x^2}}$$

Artık tek yapılması gereken, elde edilen ifadelerin taylor serisinde yerine yazılıp hesaplanmasıdır.

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\left[\frac{y+x}{x}\right]\cdot\Delta x+\frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{2!}\cdot\Delta x^2+\frac{\left[-\frac{1}{x^2}\right]}{3!}\cdot\Delta x^3+\ldots$$

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\left[\frac{y+x}{x}\right]\cdot\Delta x+\frac{1}{2\cdot x}\cdot\Delta x^2-\frac{1}{6\cdot x^2}\cdot\Delta x^3+\ldots$$

$$y(1+0.1)=1+\left[\frac{0.5+1}{1}\right]\cdot 0.1+\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 0.1^2-\frac{1}{6\cdot 1^2}\cdot 0.1^3+\ldots \rightarrow y(1.1)=0.6548333333$$

ikinci ve diğer adımlarda da yine aynı denklem kullanılacaktır. Yani,

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\left[\frac{y+x}{x}\right]\cdot\Delta x+\frac{1}{2\cdot x}\cdot\Delta x^2-\frac{1}{6\cdot x^2}\cdot\Delta x^3+\ldots$$

$$y(1.1+0.1)=0.6548333333+\left[\frac{0.6548333333+1.1}{1.1}\right]\cdot(0.1)+\frac{1}{2\cdot(1.1)}\cdot(0.1)^2-\frac{1}{6\cdot(1.1)^2}\cdot(0.1)^3+\ldots$$

$$y(1.2)=0.8186666667$$

Verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü; $y=\left(\ln(x)+\frac{1}{2}\right)\cdot x$ şeklindedir.

Diğer sonuçlar aşağıda Tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with Taylor series method by order 3	y(x) values with Taylor series method by order 10	Exact values of function y(x)
1.0	0.5	0.5	0.5
1.1	0.6548333333	0.6548411977	0.6548411978
1.2	0.8186666667	0.8187858682	0.8187858682
1.3	0.9905000000	0.9910735567	0.9910735438
1.4	1.169333333	1.171061418	1.171061131
1.5	1.354166667	1.358200800	1.358197662

Taylor serisinde hem terim sayısı artırılıp (5. mertebedene kadar olan terimler dikkate alındığında) hem de Δx aralığı azaltıldığı takdirde (Δx=0.01), sonuçların gerçek değere daha çok yakınsadığı görülür.Yani,

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\left[\frac{y+x}{x}\right]\cdot\Delta x+\frac{1}{2\cdot x}\cdot\Delta x^2-\frac{1}{6\cdot x^2}\cdot\Delta x^3+\frac{1}{12\cdot x^3}\cdot\Delta x^4-\frac{1}{20\cdot x^4}\cdot\Delta x^5+\ldots$$

Zekeriya Girgin

x values	y(x) values with Taylor series method by order 10	Exact values of y
1.0	0.5	0.5
1.1	0.6548411978	0.6548411978
1.2	0.8187858674	0.8187858681
1.3	0.9910735428	0.9910735438
1.4	1.171061131	1.171061131
1.5	1.358197660	1.358197662

Görüldüğü gibi sonuçlar gerçek değere çok yaklaşmaktadır.

7.2 Euler Metodu (Euler's Method)

Başlangıç değer problemleri için kullanılan en basit metottur. Taylor serinin ilk iki terimi (yani birinci türeve kadar olan terimleri dikkate alındığında), Euler metodu elde edilir.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \rightarrow y(x_i + \Delta x) = y_i + \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}\right) \cdot \Delta x$$

Denklemde Δx=h artış değeri olarak gösterildiğinde,

$$y(x_i + h) = y_i + \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}\right) \cdot h \qquad (113)$$

haline gelir. yani başlangıç değeri bilinen birinci dereceden Adi Diferansiyel Denklemin sayısal çözümü böylece hesaplanır.

7.2.1 Misal

$\frac{dy}{dx} - 2 \cdot y = 1,\ y(0) = 0.5$ şeklinde diferansiyel denklemde h=0.1 değerini kullanarak y(0.2) deki çözümünü Euler metodu ile hesaplayınız

Çözüm: Bu fonksiyonun analitik çözümü, $y(x) = e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2}$ denklemidir.

$$y(x + \Delta x) = y(x) + y'(x) \cdot \Delta x + \ldots \rightarrow \frac{dy}{dx} - 2 \cdot y = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y + 1 \rightarrow y' = \boxed{2 \cdot y + 1}$$

$$y(x_i + h) = y_i + (2 \cdot y_i + 1) \cdot h \rightarrow \quad y(0 + 0.1) = 0.5 + (2 \cdot 0.5 + 1) \cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y(0.1) = 0.7}$$

$y(0.2) = 0.7 + (2 \cdot 0.7 + 1) \cdot 0.1 \rightarrow \quad \boxed{y(0.2) = 0.94}$ olur.

7.2.2 Misal

Zekeriya Girgin

$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x}$, $y(1)=0.5$ ile verilen diferansiyel denklemin y(1.5) için çözümünü h=0.1 aralık değeri alarak Euler metodu ile hesaplayınız

Çözüm: Denklem (113) uygulanmalıdır.

$$y\left(x_i+h\right)=y_i+\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}\right)\cdot h \rightarrow \quad y\left(1+0.1\right)=0.5+\left(\frac{0.5+1}{1}\right)\cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y\left(1.1\right)=0.65}$$

$$y\left(1.1+0.1\right)=0.65+\left(\frac{0.65+1.1}{1.1}\right)\cdot 0.1 \rightarrow \quad \boxed{y\left(1.2\right)=0.8090909091}$$ olur.

Denklemin gerçek çözümü

$$y=x\cdot\left(\ln\left(x\right)+c\right) \quad \rightarrow \quad 0.5=1\cdot\left(\ln\left(1\right)+c\right), \rightarrow c=\frac{1}{2} \rightarrow y=x\cdot\left(\ln\left(x\right)+\frac{1}{2}\right)$$ şeklindedir.

Sonuçlar tablo halinde verildiğinde,

x values	y(x) value with Euler method	Exact values of y
1.0	0.5	0.5
1.1	0.650000000	0.6548411978
1.2	0.8090909091	0.8187858681
1.3	0.9765151515	0.9910735438
1.4	1.151631702	1.171061131
1.5	1.333891109	1.358197662

basamak değeri h küçük alındığı takdirde (h=0.0001 gibi) değerlerin gerçek değere yaklaştığı görülür.

7.3 Runge-Kutta Metodu (Runge-Kutta Method)

Taylor serisinde türevler artarak gittiğinden dolayı terimlerin elde edilişinde zorluklar olmaktadır. Bir çok değişik türleri olmasına rağmen hepsi de Denklem (113) ile aynı hale getirilir.

$$y_{i+1}=y_i+\phi\left(x_i,y_i,h\right)\cdot h \tag{114}$$

Buradaki $\phi\left(x_i,y_i,h\right)$ artış fonksiyonu olarak adlandırılır ve genel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\phi=a_1\cdot k_1+a_2\cdot k_2+a_3\cdot k_3+\ldots+a_n\cdot k_n \tag{115}$$

Buradaki a_i ler sabit sayılardır. k_i ler ise ardarda hesaplanabilen fonksiyonlardır. tanımlamaları aşağıda verilmiştir.

$$k_1=f\left(x_i,y_i\right)$$

$$k_2=f\left(x_i+p_1\cdot h,y_i+q_{11}\cdot k_1\cdot h\right)$$

Zekeriya Girgin

$k_3 = f\left(x_i + p_2 \cdot h, y_i + q_{21} \cdot k_1 \cdot h + q_{22} \cdot k_2 \cdot h\right)$

$k_4 = f\left(x_i + p_3 \cdot h, y_i + q_{31} \cdot k_1 \cdot h + q_{32} \cdot k_2 \cdot h + q_{33} \cdot k_3 \cdot h\right)$

$\vdots$

$k_n = f\left(x_i + p_{n-1} \cdot h, y_i + q_{n-1,1} \cdot k_1 \cdot h + q_{n-1,2} \cdot k_2 \cdot h + \ldots + q_{n-1,n-1} \cdot k_{n-1} \cdot h\right)$

Burada geçen p ve q lar sabit katsayılardır. Dikkat edilirse n=1 alındığı takdirde Euler Metoduna dönüşmektedir. n=2 alındığında ikinci dereceden Runge-Kutta metotları elde edilir.

7.3.1 İkinci Dereceden Runge-Kutta Metotları (Second-Order Runge-Kutta Methods)

İkinci dereceden Runge-Kutta metotları için Denklem (114) ve (115) den,

$y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h \rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + (a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2) \cdot h \rightarrow y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h$

$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$

$k_2 = f\left(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h\right)$

$$y_{i+1} = y_i + y_i' \cdot \Delta x + \frac{y_i''}{2!} \cdot \Delta x^2 \rightarrow y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right) \cdot h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} \cdot h^2$$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f\left(x_i, y_i\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x_i, y_i\right)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$ olduğundan,

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right) \cdot h + \left(\frac{\partial f\left(x_i, y_i\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x_i, y_i\right)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{h^2}{2!}$$

iki değişkenli fonksiyonlar için Taylor serisi,

$$f(x+r, y+s) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot r + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot s + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot r^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot r \cdot s + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot s^2\right] + \ldots$$ şeklindedir. Bu işlem $f\left(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h\right)$ fonksiyonu için yazıldığında;

$$f\left(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h\right) = f\left(x_i, y_i\right) + p_1 \cdot h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} \cdot k_1 \cdot h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + O\left(h^2\right)$$

elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot f\left(x_i, y_i\right) \cdot h + a_2 \cdot \frac{f\left(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot f\left(x_i, y_i\right) \cdot h\right)}{2} \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot h \cdot f\left(x_i, y_i\right) + a_2 \cdot h \cdot f\left(x_i, y_i\right) + a_2 \cdot p_1 \cdot h^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \cdot q_{11} \cdot h^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + O\left(h^2\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 + a_2\right] \cdot f\left(x_i, y_i\right) \cdot h + \left[a_2 \cdot p_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \cdot q_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right] \cdot h^2 + O\left(h^2\right)$$

Buradan; $a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 \cdot p_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 \cdot q_{11} = \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

4 bilinmeyen ve 3 denklem olduğundan, sabitlerden birisi keyfi seçilir.

Zekeriya Girgin

$a_1 = 1 - a_2,\quad p_1 = q_{11} = \dfrac{1}{2 \cdot a_2}$

7.3.1.1 Heun Metodu (Heun Method) a₂=1/2

$a_2 = \dfrac{1}{2}$ kabul edildiğinden diğerleri buna bağlı olarak $a_1 = \dfrac{1}{2},\quad p_1 = q_{11} = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

şeklinde hesaplanır. Buradan fonksiyon için,

$$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$k_2 = f(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h) \rightarrow \quad k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 \cdot h)$ olur. veya;

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 + a_2] \cdot f(x_i, y_i) \cdot h + \left[a_2 \cdot p_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \cdot q_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot h^2 + O(h^2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{[a_1 + a_2]}_{=1} \cdot f(x_i, y_i) \cdot h + \left[\underbrace{a_2 \cdot p_1}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{a_2 \cdot q_{11}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot h^2 + O(h^2)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot h^2 + \ldots$$

$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + \left(\dfrac{1}{2} \cdot k_1 + \dfrac{1}{2} \cdot k_2 \right) \cdot h$ olur Böylece temel formüller,

$$\boxed{k_1 = f(x_i, y_i)} \rightarrow \boxed{k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 \cdot h)} \rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2} \cdot k_1 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \right) \cdot h}$$

şeklinde özetlenir.

7.3.1.1.1 Misal

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x} \cdot y = 1,\quad y(1) = 0.5$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin x=1.5 deki değerini h=0.1 alarak, Heun metodu ile hesaplayınız.

Çözüm: verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü, $y = x \cdot \left(\ln(x) + \dfrac{1}{2} \right)$ şeklindedir. Birinci basamak için (x=0.1) hesaplama ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = k_1 = \frac{y}{x} + 1 \rightarrow k_1 = \frac{0.5}{1} + 1 \rightarrow \boxed{k_1 = 1.5}$$

$$x = x_i + h \rightarrow x = 1 + 0.1 = 0.1 \rightarrow \boxed{x = 1.1},\quad y = y_i + k_1 \cdot h \rightarrow y = 0.5 + (1.5) \cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y = 0.65}$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 \cdot h) \rightarrow k_2 = \frac{y}{x} + 1 \rightarrow k_2 = \frac{0.65}{1.1} + 1 \rightarrow k_2 = \frac{0.65}{1.1} + 1 \rightarrow \boxed{k_2 = 1.5909090909}$$

Zekeriya Girgin

$$y_{i+1}=y_i+\left(\frac{1}{2}\cdot k_1+\frac{1}{2}\cdot k_2\right)\cdot h \rightarrow y(1.1)=y(1)+\left(\frac{1}{2}\cdot(1.5)+\frac{1}{2}\cdot(1.5909090909)\right)\cdot 0.1$$

$$\boxed{y(1.1)=0.6545454545}$$

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with Heun method	Exact values of y
1.00	0.5	0.5
1.10	0.6545454545	0.6548411978
1.20	0.8182162534	0.8187858682
1.30	0.9902470951	0.9910735438
1.40	1.1699913771	1.1710611313
1.50	1.3568955231	1.3581976622
1.60	1.5504802246	1.5520058068
1.70	1.7503264152	1.7520680268
1.80	1.9560645703	1.9580159968
1.90	2.1673664031	2.1695223837
2.00	2.3839383191	2.3862943611

7.3.1.1.2 Misal

$\frac{dy}{dx}-0.6\cdot y=-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x}$, $y(0)=0.5$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin x=1 deki değerini h=0.1 alarak Heun metodu ile hesaplayınız.

Çözüm: verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü, $y=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot x}$ şeklindedir. Birinci basamak için (x=0.1) hesaplama ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy}{dx}-0.6\cdot y=-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=k_1=0.6\cdot y-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x} \rightarrow k_1=0.6\cdot(0.5)-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot 0} \rightarrow k_1=-0.3$$

$$x=x_i+h \rightarrow x=0+0.1=0.1,\; y=y_i+k_1\cdot h \rightarrow y=0.5+(-0.3)\cdot 0.1=0.47$$

$$k_2=f(x_i+h,y_i+k_1\cdot h) \rightarrow k_2=0.6\cdot y-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x} \rightarrow k_2=0.6\cdot(0.47)-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot 0.1}=-0.2650587202$$

$$y_{i+1}=y_i+\left(\frac{1}{2}\cdot k_1+\frac{1}{2}\cdot k_2\right)\cdot h \rightarrow y(0.1)=y(0)+\left(\frac{1}{2}\cdot(-0.3)+\frac{1}{2}\cdot(-0.2650587202)\right)\cdot 0.1$$

Zekeriya Girgin

$y(0.1) = 0.4708470640$

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with Heun method	Exact values of y
0.00	0.5	0.5
0.10	0.4708470640	0.4708822668
0.20	0.4433896873	0.4434602184
0.30	0.4175289937	0.4176351057
0.40	0.3931718570	0.3933139305
0.50	0.3702305651	0.3704091103
0.60	0.3486225049	0.3488381630
0.70	0.3282698639	0.3285234099
0.80	0.3090993509	0.3093916959
0.90	0.2910419313	0.2913741262
1.00	0.2740325792	0.2744058180

7.3.1.2 Orta Nokta Metodu (Midpoint Method) $a_2=1$

$a_2 = 1$ kabul edildiğinden diğerleri buna bağlı olarak $a_1 = 0, \quad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$

şeklinde hesaplanır. Buradan fonksiyon için,

$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h}$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h) \rightarrow \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right)$ olur. Sıra ile yapılacak işlemler aşağıda verilmiştir.

$$\boxed{k_1 = \frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)} \rightarrow \boxed{k_2 = \frac{dy}{dx} = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right)} \rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h}$$

7.3.1.2.1 Misal

$\frac{dy}{dx} - 0.6 \cdot y = -\frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot x}, \quad y(0) = 0.5$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin x=1 deki değerini h=0.1 alarak Orta Nokta metodu ile hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü, $y=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{3}{5}\cdot x}$ şeklindedir. Birinci basamak için (x=0.1) hesaplama ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy}{dx}-0.6\cdot y=-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x} \rightarrow k_1=\frac{dy}{dx}=0.6\cdot y-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot x} \rightarrow k_1=0.6\cdot(0.5)-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot 0} \rightarrow k_1=-0.3$$

$$x=x_i+\frac{1}{2}\cdot h \rightarrow x=0+\frac{1}{2}\cdot 0.1=0.05,\ y=y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h \rightarrow y=0.5+\frac{1}{2}\cdot(-0.3)\cdot 0.1=0.485$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h, y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h\right) \rightarrow k_2=+0.6\cdot 0.485-\frac{3}{5}\cdot e^{-\frac{6}{10}\cdot 0.05} \rightarrow k_2=-0.2912673201$$

$$y_{i+1}=y_i+k_2\cdot h \rightarrow y(0.1)=0.5+(-0.2912673201)\cdot 0.1$$

$$y(0.1)=0.4708732680$$

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with Midpoint method	Exact values of y
0.00	0.5	0.5
0.10	0.4708732680	0.4708822668
0.20	0.4434421887	0.4434602184
0.30	0.4176079806	0.4176351057
0.40	0.3932776126	0.3933139305
0.50	0.3703634693	0.3704091103
0.60	0.3487830349	0.3488381630
0.70	0.3284585966	0.3285234099
0.80	0.3093169645	0.3093916959
0.90	0.2912892080	0.2913741262
1.00	0.2743104079	0.2744058180

7.3.1.3 Ralston Metodu (Ralston’s Method) $a_2=2/3$

$a_2=2/3$ kabul edildiğinden diğerleri buna bağlı olarak $a_1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $p_1=q_{11}=\frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$

$$a_1=\frac{1}{3},\quad p_1=q_{11}=\frac{3}{4}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan fonksiyon için,

Zekeriya Girgin

$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} \cdot k_1 + \frac{2}{3} \cdot k_2\right) \cdot h}$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 \cdot h, y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h) \rightarrow \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4} \cdot h, y_i + \frac{3}{4} \cdot k_1 \cdot h\right)$ olur. Sıra ile yapılacak işlemler aşağıda verilmiştir.

$\boxed{k_1 = \frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)} \rightarrow \boxed{k_2 = \frac{dy}{dx} = f\left(x_i + \frac{3}{4} \cdot h, y_i + \frac{3}{4} \cdot k_1 \cdot h\right)} \rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} \cdot k_1 + \frac{2}{3} \cdot k_2\right) \cdot h}$

7.3.1.3.1 Misal

$\frac{dy}{dx} - 0.6 \cdot y = -\frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot x}, \quad y(0) = 0.5$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin x=1 deki değerini h=0.1 alarak Ralston metodu ile hesaplayınız.

Çözüm: verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü, $y = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{3}{5} \cdot x}$ şeklindedir. Birinci basamak için (x=0.1) hesaplama ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

$\frac{dy}{dx} - 0.6 \cdot y = -\frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = k_1 = 0.6 \cdot y - \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot x} \rightarrow k_1 = 0.6 \cdot (0.5) - \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot 0} \rightarrow k_1 = -0.3$

$x = x_i + \frac{3}{4} \cdot h \rightarrow x = 0 + \frac{3}{4} \cdot 0.1 = 0.075, \quad y = y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h \rightarrow y = 0.5 + \frac{3}{4} \cdot (-0.3) \cdot 0.1 = 0.4775$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right) \rightarrow k_2 = 0.6 \cdot 0.4775 - \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{6}{10} \cdot 0.075} \rightarrow k_2 = -0.2870984891$

$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} \cdot k_1 + \frac{2}{3} \cdot k_2\right) \cdot h \rightarrow y(0.1) = 0.5 + y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} \cdot (-0.3) + \frac{2}{3} \cdot (-0.2870984891)\right) \cdot 0.1$

$y(0.1) = 0.4708601007$

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with Midpoint method	Exact values of y
0.00	0.5	0.5
0.10	0.4708601007	0.4708822668
0.20	0.4434158072	0.4434602184
0.30	0.4175682904	0.4176351057
0.40	0.3932244714	0.3933139305

Zekeriya Girgin

0.50	0.3702966862	0.3704091103
0.60	0.3487023701	0.3488381630
0.70	0.3283637602	0.3285234099
0.80	0.3092076157	0.3093916959
0.90	0.2911649538	0.2913741262
1.00	0.2741708016	0.2744058180

7.3.2 Üçüncü Dereceden Runge-Kutta Metotları (Third-Order Runge-Kutta Methods)

Üçüncü dereceden Runge-Kutta metotları için en çok bilinen ve kullanılan değerler aşağıda verilmiştir.

$$y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h \rightarrow y_{i+1} = y_i + (a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + a_3 \cdot k_3) \cdot h \rightarrow y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h + a_3 \cdot k_3 \cdot h$$

Yine burada da aşağıdaki işlem basamakları takip edilerek fonksiyonun bir sonraki değeri elde edilir.

$$\boxed{k_1 = f(x_i, y_i)} \rightarrow \boxed{k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right)} \rightarrow \boxed{k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h)}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3) \cdot h}$$

ile tanımlıdır.

7.3.2.1 Misal

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 2$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin x=2 deki değerini h=0.1 alarak, 3. dereceden RK metodu ile hesaplayınız

(Analitik çözümü: $y = (x+1) \cdot x$)

Çözüm:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \rightarrow k_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x \rightarrow k_1 = \frac{y}{x} + x = \frac{2}{1} + 1 = 3 \rightarrow k_1 = 3$$

k_2 değerinin hesaplanabilmesi için önce burada kullanılacak x ve y değerlerinin hesaplanması gerekir ve bu değerler aşağıda verilmiştir.

$$x = x_i + \frac{1}{2} \cdot h \rightarrow x = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \rightarrow x = 1.05, \quad y = y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot 0.1 = 2.15$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right) \rightarrow k_2 = \frac{y}{x} + x \rightarrow k_2 = \frac{2.15}{1.05} + 1.05 \rightarrow k_2 = 3.0976190476$$

Zekeriya Girgin

$x = x_i + h \rightarrow x = 1 + 0.1 = 1.1$

$y = y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow y = 2 - 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 3.0976190476 \cdot 0.1 \rightarrow y = 2.3195238095$

$k_3 = f\left(x_i + h, y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h\right) \rightarrow k_3 = \frac{y}{x} + x \rightarrow k_3 = \frac{2.3195238095}{1.1} + 1.1 \rightarrow k_3 = 3.2086580087$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3) \cdot h \rightarrow y(1.1) = 2 + \frac{1}{6} \cdot (3 + 4 \cdot 3.0976190476 + 3.2086580087) \cdot 0.1$

$y(1.1) = 2.3099855700$ olduğu görülür. Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with 3rd order RK method	Exact values of y
1.00	2.0	2.0
1.10	2.3099855700	2.3100000000
1.20	2.6399721809	2.6400000000
1.30	2.9899596062	2.9900000000
1.40	3.3599476806	3.3600000000
1.50	3.7499362807	3.7500000000
1.60	4.1599253123	4.1600000000
1.70	4.5899147026	4.5900000000
1.80	5.0399043941	5.0400000000
1.90	5.5098943411	5.5100000000
2.00	5.9998845066	6.0000000000

7.3.2.2 Misal

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -x, \quad y(1) = 2$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin x=2 deki değerini h=0.1 alarak, 3. dereceden RK metodu ile hesaplayınız

(Analitik çözümü: $y = (3 - x) \cdot x$)

Çözüm:

$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \rightarrow k_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x \rightarrow k_1 = \frac{y}{x} - x = \frac{2}{1} - 1 = 1 \rightarrow k_1 = 1$

k_2 değerinin hesaplanabilmesi için önce burada kullanılacak x ve y değerlerinin hesaplanması gerekir ve bu değerler aşağıda verilmiştir.

Zekeriya Girgin

$x = x_i + \frac{1}{2} \cdot h \rightarrow x = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \rightarrow x = 1.05$, $y = y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot 0.1 = 2.05$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right) \rightarrow k_2 = \frac{y}{x} - x \rightarrow k_2 = \frac{2.05}{1.05} - 1.05 \rightarrow k_2 = 0.9023809524$$

$$x = x_i + h \rightarrow x = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$y = y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow y = 2 - 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.9023809524 \cdot 0.1 \rightarrow y = 2.0804761905$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h) \rightarrow k_3 = \frac{y}{x} - x \rightarrow k_3 = \frac{2.0804761905}{1.1} - 1.1 \rightarrow k_3 = 0.7913419913$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3) \cdot h \rightarrow y(1.1) = 2 + \frac{1}{6} \cdot (1 + 4 \cdot 0.9023809524 + 0.7913419913) \cdot 0.1$$

$y(1.1) = 2.0900144300$ olduğu görülür. ilk iki iterasyona kadar elde edilen değerler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

iteration numbers	i values	x	y	k_i
1. iteration	1	1	2	1
	2	1.05	2.05	0.9023809524
	3	1.10	2.0804761905	0.7913419913
2. iteration	1	1.10	2.0900144300	0.8000131182
	2	1.15	2.1300150859	0.7021870312
	3	1.20	2.1504505244	0.592042103

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with 3rd order RK method	Exact values of y
1.00	2	2
1.10	2.0900144300	2.0900000000
1.20	2.1600278191	2.1600000000
1.30	2.2100403938	2.2100000000
1.40	2.2400523194	2.2400000000
1.50	2.2500637193	2.2500000000
1.60	2.2400746877	2.2400000000

Zekeriya Girgin

1.70	2.2100852974	2.2100000000
1.80	2.1600956059	2.1600000000
1.90	2.0901056589	2.0900000000
2.00	2.0001154934	2.0000000000

7.3.2.3 Misal

$\frac{dy}{dx} = y \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot y,\;\; y(0)=1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin x=1 deki değerini h=0.1 alarak, 3. dereceden RK metodu ile hesaplayınız

(Analitik çözümü: $y = e^{\frac{1}{4} \cdot x \cdot \left(x^3-6\right)}$)

Çözüm:

$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \rightarrow k_1 = \frac{dy}{dx} = y \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot y \rightarrow k_1 = 1 \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 \rightarrow k_1 = -1.5$

k_2 değerinin hesaplanabilmesi için önce burada kullanılacak x ve y değerlerinin hesaplanması gerekir ve bu değerler aşağıda verilmiştir.

$x = x_i + \frac{1}{2} \cdot h \rightarrow x = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \rightarrow x = 0.05$, $y = y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h \rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot 0.1 = 0.925$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right) \rightarrow k_2 = y \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot y \rightarrow k_2 = 0.925 \cdot 0.05^3 - \frac{3}{2} \cdot 0.925 \rightarrow k_2 = -1.3873843750$

$x = x_i + h \rightarrow x = 0 + 0.1 = 0.1$

$y = y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h \rightarrow y = 2 - (-1.3873843750) \cdot 0.1 + 2 \cdot (-1.3873843750) \cdot 0.1 \rightarrow y = 0.8725231250$

$k_3 = f\left(x_i + h, y_i - k_1 \cdot h + 2 \cdot k_2 \cdot h\right) \rightarrow k_3 = y \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot y \rightarrow k_3 = 0.8725231250 \cdot 0.1^3 - \frac{3}{2} \cdot 0.8725231250 \rightarrow$
$k_3 = -1.3079121644$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3\right) \cdot h \rightarrow y(1.1) = 2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-1.5 + 4 \cdot (-1.3873843750) - 1.307912164413\right) \cdot 0.1$

$y(1.1) = 0.8607294944$ olduğu görülür. Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with 3rd order RK method	Exact values of y
0.00	1.00	1.00
0.10	0.8607091723	0.8607294944
0.20	0.7410800384	0.7411146072

Zekeriya Girgin

0.30	0.6388769545	0.6389206568
0.40	0.5522868837	0.5523352942
0.50	0.4797559796	0.4798052436
0.60	0.4199114316	0.4199582405
0.70	0.3715443900	0.3715859806
0.80	0.3336368293	0.3336709337
0.90	0.3054235420	0.3054482223
1.00	0.2864914970	0.2865047969

7.3.2.4 Misal

$\frac{dy}{dx} - y = x^2 - 1,\ \ y(0) = -1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin x=0.2 deki değerini, artış değeri için h=0.1 alarak, 3. dereceden Runge-Kutta metodu ile hesaplayınız

Çözüm: $\frac{dy}{dx} - y = x^2 - 1,\ \ y(0) = -1$ ile verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü; $\boxed{y = -x^2 - 2\cdot x - 1}$ şeklindedir. Sayısal çözümü için; $k_1 = f(x_i, y_i) \rightarrow k_1 = \frac{dy}{dx} = y + x^2 - 1 \rightarrow$

$k_1 = y + x^2 - 1 = (-1) + 0^2 - 1 \rightarrow \boxed{k_1 = -2}$

k_2 değerinin hesaplanabilmesi için önce burada kullanılacak x ve y değerlerinin hesaplanması gerekir ve bu değerler aşağıda verilmiştir.

$x = x_i + \frac{1}{2}\cdot h \rightarrow x = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 \rightarrow \boxed{x = 0.05}$, $y = y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h \rightarrow y = -1 + \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y = -1.1}$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h\right) \rightarrow k_2 = y + x^2 - 1 \rightarrow k_2 = -1.1 + 0.05^2 - 1 \rightarrow \boxed{k_2 = -2.0975}$

Benzer şekilde k_3 değerinin hesaplanabilmesi için önce burada kullanılacak x ve y değerlerinin hesaplanması gerekir ve bu değerler aşağıda verilmiştir.

$x = x_i + h \rightarrow x = 0 + 0.1 \rightarrow \boxed{x = 0.1}$

$y = y_i - k_1 \cdot h + 2\cdot k_2 \cdot h \rightarrow y = -1 - (-1.1)\cdot 0.1 + 2\cdot(-2.0975)\cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y = -1.2195}$

$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1\cdot h + 2\cdot k_2 \cdot h) \rightarrow k_3 = y + x^2 - 1 \rightarrow k_3 = -1.2195 + 0.1^2 - 1 \rightarrow \boxed{k_3 = -2.2095}$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\cdot(k_1 + 4\cdot k_2 + k_3)\cdot h \rightarrow y(0.1) = -1 + \frac{1}{6}\cdot(-2 + 4\cdot(-2.0975) + (-2.2095))\cdot 0.1$

$\boxed{y(0.1) = -1.2099916667}$ olduğu görülür. ilk iki tekrarlama ile elde edilen değerler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Zekeriya Girgin

iteration numbers	i values	x	y	k_i values
3. iteration	k_1	0	-1	-2
	k_2	0.05	-1.1	-2.0975
	k_3	0.10	-1.2195	-2.2095
	x=	0.1	y=	-1.2099916667
4. iteration	k_1	0.10	-1.2099916667	-2.1999916667
	k_2	0.15	-1.3199912500	-2.2974912500
	k_3	0.20	-1.4494907500	-2.4094907500
	x=	0.2	y=	-1.4399824569

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with 3rd order RK method	Exact values of y
0.30	-1.6899722787	-1.6900000000
0.40	-1.9599610300	-1.9600000000
0.50	-2.2499485983	-2.2500000000
0.60	-2.5599348592	-2.5600000000
0.70	-2.8899196752	-2.8900000000
0.80	-3.2399028944	-3.2400000000

7.3.3 Dördüncü Dereceden Runge-Kutta Metotları (Fourth-Order Runge-Kutta Methods)

Dördüncü dereceden Runge-Kutta (RK) metodu, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en fazla metottur. Klasik 4. dereceden RK metodunun en çok kullanılan ve bilinen değerleri aşağıda verilmiştir.

$$y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h \rightarrow \qquad y_{i+1} = y_i + \left(a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + a_3 \cdot k_3 + a_4 \cdot k_4\right) \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 \cdot k_1 \cdot h + a_2 \cdot k_2 \cdot h + a_3 \cdot k_3 \cdot h + a_4 \cdot k_4 \cdot h$$

$$\boxed{k_1 = f\left(x_i, y_i\right)} \rightarrow \boxed{k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right)} \rightarrow \boxed{k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot h\right)}$$

Zekeriya Girgin

$\boxed{k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 \cdot h\right)}$ → $\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)\cdot h}$

ile tanımlıdır. Görüldüğü gibi h basamak sonrası fonksiyon değerinin hesaplanabilmesi için 5 tane işlemin (k_1, k_2, k_3, k_4 ve y_{i+1}) sırasıyla yapılması gereklidir.

7.3.3.1 Misal

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x,\quad y(1) = 2$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin x=2 deki değerini h=0.1 alarak, 4. dereceden RK metodu ile hesaplayınız

(Analitik çözümü: $y = (x+1)\cdot x$)

Çözüm:

$k_1 = f(x_i, y_i)$ → $\frac{dy}{dx} = k_1 = \frac{y}{x} + x$ → $k_1 = \frac{y}{x} + x = \frac{2}{1} + 1 = 3$ → $k_1 = 3$

$x = x_i + \frac{1}{2}\cdot h$ → $x = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 = 1.05$, $y = y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h$ → $y = 2 + \frac{1}{2}\cdot(3)\cdot 0.1 = 2.15$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h\right)$ → $k_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x = \frac{2.15}{1.05} + 1.05$ → $k_2 = 3.0976190476$

$y = y_i + \frac{1}{2}\cdot k_2\cdot h$ → $y = 2 + \frac{1}{2}\cdot(3.0976190476)\cdot 0.1 = 2.1548809524$

$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot k_2\cdot h\right)$ → $k_3 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$ → $k_3 = \frac{2.1548809524}{1.05} + 1.05$ → $k_3 = 3.1022675737$

$x = x_i + h$ → $x = 1 + 0.1 = 1.1$ $y = y_i + k_3\cdot h$ → $y = 2 + (3.1022675737)\cdot 0.1 = 2.31022675737$

$k_4 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$ → $k_4 = \frac{2.31022675737}{1.1} + 1.1$ → $k_4 = 3.2002061431$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)\cdot h$

$y(1.1) = 2 + \frac{1}{6}\cdot(3 + 2\cdot 3.0976190476 + 2\cdot 3.1022675737 + 3.2002061431)\cdot 0.1$

$y(1.1) = 2.3099996564$

Diğer basamaklar için elde edilen sonuçlar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

x values	y(x) values with 4th order RK method	Exact values of y
1.00	2.0	2.0
1.10	2.3099996564	2.3100000000
1.20	2.6399993626	2.6400000000
1.30	2.9899991044	2.9900000000

1.40	3.3599988722	3.3600000000
1.50	3.7499986595	3.7500000000
1.60	4.1599984618	4.1600000000
1.70	4.5899982756	4.5900000000
1.80	5.0399980986	5.0400000000
1.90	5.5099979289	5.5100000000
2.00	5.9999977651	6.0000000000

7.4 İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Şimdiye kadar sadece birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin sayısal çözümlerine yer verildi. Bu bölümde, birinci mertebeden 2 adet diferansiyel denklem beraber verildiğinde Runge-Kutta metodu ile bu denklem çiftlerinin nasıl çözüldüğü misallerle izâh edilmiştir (açıklanmıştır). Ayrıca n. mertebeden bir diferansiyel denklem n adet birinci mertebeden diferansiyel denklem ile ifade edilebilmektedir. Taylor serisi, Euler veya Runge-Kutta metotları ile yapılan çözümler birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili olduğundan, yüksek mertebeden bir diferansiyel denklem, ilk önce birinci mertebeden diferansiyel denklemlere dönüştürülür ve daha sonra çözüm yapılır. İşlemin nasıl yapıldığının anlaşılması için aşağıdaki misallerde gösterilmiştir.

7.4.1 Misal

$\frac{dy}{dx}+y-z=x+1$, $\frac{dz}{dx}-y+z=x$ ve $y(0)=1$, $z(0)=-1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin $(x=0.5)$ deki değerlerini $(h=\Delta x=0.1)$ alarak, 2. mertebeden Ortanokta (Midpoint) RK metodu ile hesaplayınız.

Çözüm: temel formüller aşağıda verilmiştir.

$$\boxed{k_1=\frac{dy}{dx}=f(x_i,y_i)} \rightarrow \boxed{k_2=\frac{dy}{dx}=f\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h, y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h\right)} \rightarrow \boxed{y_{i+1}=y_i+k_2\cdot h}$$

Bu formüller genişletilerek, $k_i=\frac{dy}{dx}=f_1(x_i,y_i,z_i)$ için yazıldığı gibi benzer işlemler uygulanarak, $K_i=\frac{dz}{dx}=f_2(x_i,y_i,z_i)$ için de yazılır. Yani $f(x_i,y_i)$ yerine $f_i(x_i,y_i,z_i)$ yazılır. Genişletme esnasında (y_i) için ne yazılmış ise, (z_i) için de benzer işlemler uygulanır.

$$\frac{dy}{dx}+y-z=x+1 \rightarrow \frac{dy}{dx}=x-y+z+1\ ,\ \frac{dz}{dx}-y+z=x \rightarrow \frac{dz}{dx}=x+y-z$$

$$\boxed{k_1=\frac{dy}{dx}=f_1(x_i,y_i,z_i)} \rightarrow \boxed{k_1=f(0,1,-1)} \rightarrow k_1=\frac{dy}{dx}=x-y+z+1 \rightarrow k_1=\frac{dy}{dx}=0-1+(-1)+1 \rightarrow \boxed{k_1=-1}$$

Zekeriya Girgin

$\boxed{K_1 = \frac{dz}{dx} = f_2(x_i, y_i, z_i)}$ $\boxed{K_1 = f_2(0,1,-1)}$ → $K_1 = \frac{dz}{dx} = x + y - z$ → $K_1 = x + y - z$ → $K_1 = 0 + 1 - (-1)$ $\boxed{K_1 = 2}$

(k_2) ve (K_2) değerlerinin hesaplanabilmesi için ilk önce (x, y, z) değerlerinin bulunması gereklidir.

$\boxed{k_2 = \frac{dy}{dx} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h, z_i + \frac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h\right)}$, $\boxed{K_2 = \frac{dz}{dx} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h, z_i + \frac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h\right)}$

$x = x_i + \frac{1}{2}\cdot h$ → $x = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 = 0.05$, $y = y_i + \frac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h$ → $y = 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 0.1 = 0.95$, $z = z_i + \frac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h$ → $z = -1 + \frac{1}{2}\cdot(2)\cdot 0.1 = -0.90$ → $\boxed{k_2 = f_1(0.05, 0.95, -0.90)}$ → $\boxed{K_2 = f_2(0.05, 0.95, -0.90)}$

$k_2 = \frac{dy}{dx} = x - y + z + 1$ → $k_2 = 0.05 - 0.95 - 0.90 + 1$ → $\boxed{k_2 = -0.8}$, $K_2 = \frac{dz}{dx} = x + y - z$ → $K_2 = 0.05 + 0.95 - (-0.90)$ → $\boxed{K_2 = +1.90}$

Son işlem olarak aşağıda verilen denklemde yerine yazılmalıdır.

$\boxed{y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h}$, $\boxed{z_{i+1} = z_i + K_2 \cdot h}$

$y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h$ → $y(0.1) = 1 + (-0.8)\cdot 0.1$ → $\boxed{y(0.1) = 0.92}$ ve $z_{i+1} = z_i + K_2 \cdot h$ → $z(0.1) = -1 + (1.90)\cdot 0.1$ → $\boxed{z(0.1) = -0.81}$ olarak değerler hesaplanmış olur. Benzer işlemler $(x = 0.5)$ oluncaya kadar tekrarlandığında aşağıdaki tablo değerleri elde edilir.

Tekrar sayısı	x	y	z	k_i	K_i
1	0.00	+1.000000	-1.000000	-1.000000	+2.000000
2	0.05	+0.950000	-0.900000	-0.800000	+1.900000
1	0.1	+0.920000	-0.810000		
1	0.10	+0.920000	-0.810000	-0.630000	+1.830000
2	0.15	+0.888500	-0.718500	-0.457000	+1.757000
2	0.2	+0.874300	-0.634300		
1	0.20	+0.874300	-0.634300	-0.308600	+1.708600
2	0.25	+0.858870	-0.548870	-0.157740	+1.657740
3	0.3	+0.858526	-0.468526		
1	0.30	+0.858526	-0.468526	-0.027052	+1.627052
2	0.35	+0.857173	-0.387173	+0.105653	+1.594347

Zekeriya Girgin

4	0.4	+0.869091	-0.309091		
1	0.40	+0.869091	-0.309091	+0.221817	+1.578183
2	0.45	+0.880182	-0.230182	+0.339636	+1.560364
5	0.5	+0.903055	-0.153055		

7.4.2 Misal

$\frac{dy}{dx}+y-z=x+1$, $\frac{dz}{dx}-y+z=x$ ve $y(0)=1$, $z(0)=-1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin $(x=0.2)$ deki değerlerini $(h=\Delta x=0.1)$ alarak, Euler metodu ile hesaplayınız.

Çözüm: temel formüller aşağıda verilmiştir.

$$y_{i+1}=y_i+\frac{dy_i}{dx}\cdot\Delta x \;,\; z_{i+1}=z_i+\frac{dz_i}{dx}\cdot\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx}+y-z=x+1 \rightarrow \frac{dy_i}{dx}=x_i-y_i+z_i+1 \;,\; \frac{dz_i}{dx}-y_i+z_i=x_i \rightarrow \frac{dz_i}{dx}=x_i+y_i-z_i$$

Başlangıç değeri olarak, $(x_i=0, y_i=1, z_i=-1)$ verildiğinden bu değerler yerine yazılır.

$$\frac{dy_i}{dx}=x_i-y_i+z_i+1 \rightarrow \frac{dy_i}{dx}=0-1+(-1)+1 \rightarrow \frac{dy_i}{dx}=-1,\; y_{i+1}=y_i+\frac{dy_i}{dx}\cdot\Delta x \rightarrow y(0.1)=y(0)+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\cdot 0.1$$

$y(0.1)=1+(-1)\cdot 0.1 \rightarrow y(0.1)=0.9$ olarak bulunur. Benzer işlemler z için yapıldığında;

$$\frac{dz_i}{dx}=x_i+y_i-z_i \rightarrow \frac{dz_i}{dx}=0+1-(-1) \rightarrow \frac{dz_i}{dx}=2 \;,\; z_{i+1}=z_i+\frac{dz_i}{dx}\cdot\Delta x \;,\; z(0.1)=z(0)+\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}\cdot 0.1$$

$z(0.1)=-1+2\cdot 0.1 \rightarrow z(0.1)=-0.8$ olduğu görülür. Böylece birinci tekrarlama tamamlanmış olur. İkinci tekrarlama için;

$\frac{dy_i}{dx}=x_i-y_i+z_i+1 \rightarrow \frac{dy_i}{dx}=0.1-0.9+(-0.8)+1 \rightarrow \frac{dy_i}{dx}=-0.6$ olur.

$$y_{i+1}=y_i+\frac{dy_i}{dx}\cdot\Delta x \rightarrow y(0.2)=y(0.1)+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0.1}\cdot 0.1 \rightarrow y(0.2)=0.9+(-0.6)\cdot 0.1 \rightarrow y(0.2)=0.62$$

$$\frac{dz_i}{dx}=x_i+y_i-z_i \rightarrow \frac{dz_i}{dx}=0.1+0.9-(-0.8) \rightarrow \frac{dz_i}{dx}=1.8 \;,\; z_{i+1}=z_i+\frac{dz_i}{dx}\cdot\Delta x$$

$z(0.2)=z(0.1)+\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0.1}\cdot 0.1 \rightarrow z(0.2)=-0.8+1.8\cdot 0.1 \rightarrow z(0.2)=-0.62$ olduğu görülür.

7.4.3 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\cdot\frac{dy}{dx}+5\cdot y=x$, ve $y(0)=-1$, $y'(0)=2$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin $y(0.2)$ deki değerini h=0.1 alarak, 4. dereceden RK metodu ile hesaplayınız.

(Analitik çözümü: $y=\frac{3\cdot e^{-2x}\sin(x)}{25}-\frac{21\cdot e^{-2x}\cos(x)}{25}+\frac{x}{5}-\frac{4}{25}$, $y(0.1)=-0.814489625418$)

Zekeriya Girgin

Çözüm: $\frac{d^2y}{dx^2}+4\cdot\frac{dy}{dx}+5\cdot y=0$ → $z=\frac{dy}{dx}$ olsun. Buradan; $\frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ yazılabilir. Böylece, $\frac{dz}{dx}+4\cdot z+5\cdot y=x$ olur. Şu an elimizde iki tane birinci mertebeden diferansiyel denklem bulunmaktadır. Bunlar;

$k_1=\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z)=z$ ve $K_1=\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z)=-4\cdot z-5\cdot y+x$ denklemleridir.

$\boxed{k_1=\frac{dy}{dx}=f_1(x_i,y_i,z_i)}$ → $\boxed{k_1=f_1(0,-1,2)}$ → $k_1=\frac{dy}{dx}=z$ → $k_1=y_i'=z=2$ → $\boxed{k_1=2}$

$\boxed{K_1=\frac{dz}{dx}=f_2(x_i,y_i,z_i)}$ $\boxed{K_1=f_2(0,-1,2)}$ → $K_1=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x$ → $K_1=-4\cdot 2-5\cdot(-1)+0$ → $\boxed{K_1=-3}$

(k_2) ve (K_2)değerlerinin hesaplanabilmesi için ilk önce (x,y,z) değerlerinin bulunması gereklidir.

$\boxed{k_2=f_1\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h,y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h,z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h\right)}$, $\boxed{K_2=f_2\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h,y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h,z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h\right)}$

$x=x_i+\frac{1}{2}\cdot h$ → $x=0+\frac{1}{2}\cdot 0.1=0.05$, $y=y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h$ → $y=-1+\frac{1}{2}\cdot(2)\cdot 0.1=-0.9$, $z=z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h$ → $z=2+\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot 0.1=1.85$ → $\boxed{k_2=f_1(0.05,-0.9,1.85)}$ → $\boxed{K_2=f_2(0.05,-0.9,1.85)}$

$k_2=\frac{dy}{dx}=z$ → $\boxed{k_2=1.85}$, $K_2=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x$ → $K_2=-4\cdot(1.85)-5\cdot(-0.9)+(0.05)$ → $\boxed{K_2=-2.85}$

Benzer şekilde diğerleri hesaplanır.

$\boxed{k_3=f_1\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h,y_i+\frac{1}{2}\cdot k_2\cdot h,z_i+\frac{1}{2}\cdot K_2\cdot h\right)}$, $\boxed{K_3=f_2\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h,y_i+\frac{1}{2}\cdot k_2\cdot h,z_i+\frac{1}{2}\cdot K_2\cdot h\right)}$

$x=x_i+\frac{1}{2}\cdot h$ → $x=0+\frac{1}{2}\cdot 0.1=0.05$, $y=y_i+\frac{1}{2}\cdot k_2\cdot h$ → $y=-1+\frac{1}{2}\cdot(1.85)\cdot 0.1=-0.9075$, $z=z_i+\frac{1}{2}\cdot K_2\cdot h$ → $z=2+\frac{1}{2}\cdot(-2.85)\cdot 0.1=1.8575$ → $\boxed{k_3=f_1(0.05,-0.9075,1.8575)}$, $\boxed{K_3=f_2(0.05,-0.9075,1.8575)}$

$k_3=\frac{dy}{dx}=z$ → $\boxed{k_3=1.8575}$, $K_3=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x$ → $K_3=-4\cdot(1.8575)-5\cdot(-0.9075)+(0.05)$ → $\boxed{K_3=-2.8425}$

$\boxed{k_4=f_1(x_i+h,y_i+k_3\cdot h,z_i+K_3\cdot h)}$, $\boxed{K_4=f_2(x_i+h,y_i+k_3\cdot h,z_i+K_3\cdot h)}$

$x=x_i+h$ → $x=0+0.1=0.1$, $y=y_i+k_3\cdot h$ → $y=-1+(1.8575)\cdot 0.1=-0.81425$, $z=z_i+K_3\cdot h$ → $z=2+(-2.8425)\cdot 0.1=1.7157$ → $\boxed{k_4=f_1(0.1,-0.81425,1.7157)}$, $\boxed{K_4=f_2(0.1,-0.81425,1.7157)}$

Zekeriya Girgin

$k_4=\frac{dy}{dx}=z \rightarrow \boxed{k_4=1.7157}$, $K_4=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x \rightarrow K_3=-4\cdot(1.7157)-5\cdot(-0.81425)+(0.1) \rightarrow$ $\boxed{K_4=-2.6917}$

Hesaplanan değerler aşağıdaki denklemlerde yerine yazıldığında,

$\boxed{y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}\cdot(k_1+2\cdot k_2+2\cdot k_3+k_4)\cdot h}$, $\boxed{z_{i+1}=z_i+\frac{1}{6}\cdot(K_1+2\cdot K_2+2\cdot K_3+K_4)\cdot h}$

$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}\cdot(k_1+2\cdot k_2+2\cdot k_3+k_4)\cdot h \rightarrow y_{i+1}=-1+\frac{1}{6}\cdot(2+2\cdot 1.85+2\cdot 1.8575+1.7157)\cdot 0.1$

$y_{i+1}=-0.81449 \rightarrow \boxed{y(0.1)=-0.81449}$

$z_{i+1}=z_i+\frac{1}{6}\cdot(K_1+2\cdot K_2+2\cdot K_3+K_4)\cdot h \rightarrow z(0.1)=z(0)+\frac{1}{6}\cdot(-3+2\cdot(-2.85)+2\cdot(-2.8425)-2.6917)\cdot 0.1$

$\boxed{z(0.1)=1.7154}$ olarak hesaplanır. Böylece birinci tekrarlama tamamlanmış olur. İkinci tekrarlama için başlangıç değerleri;

$\boxed{k_1=\frac{dy}{dx}=f_1(x_i,y_i,z_i)}$, $\rightarrow \boxed{k_1=f_1(0.1,-0.81449,1.7154)}$

$\boxed{K_1=\frac{dz}{dx}=f_2(x_i,y_i,z_i)} \rightarrow \boxed{K_1=f_2(0.1,-0.81449,1.7154)}$ olarak alınacaktır.

$k_1=\frac{dy}{dx}=z \rightarrow k_1=\frac{dy}{dx}=z=1.7154 \rightarrow \boxed{k_1=1.7154}$

$\boxed{K_1=\frac{dz}{dx}=f_2(x_i,y_i,z_i)} \rightarrow K_1=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x \rightarrow K_1=-4\cdot 1.7154-5\cdot(-0.81449)+0.1$

$\boxed{K_1=-2.6891}$

(k_2) ve (K_2) değerlerinin hesaplanabilmesi için ilk önce (x,y,z) değerlerinin bulunması gereklidir.

$\boxed{k_2=f_1\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h, y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h, z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h\right)}$, $\boxed{K_2=f_2\left(x_i+\frac{1}{2}\cdot h, y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h, z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h\right)}$

$x=x_i+\frac{1}{2}\cdot h \rightarrow x=0.1+\frac{1}{2}\cdot 0.1=0.15$, $y=y_i+\frac{1}{2}\cdot k_1\cdot h \rightarrow y=-0.81449+\frac{1}{2}\cdot(1.7154)\cdot 0.1$

$y=-0.72872$, $z=z_i+\frac{1}{2}\cdot K_1\cdot h \rightarrow z=1.7154+\frac{1}{2}\cdot(-2.6891)\cdot 0.1=1.5809$

$\boxed{k_2=f_1(0.15,-0.72872,1.5809)} \rightarrow \boxed{K_2=f_2(0.15,-0.72872,1.5809)}$

$k_2=\frac{dy}{dx}=z \rightarrow \boxed{k_2=1.5809}$, $K_2=\frac{dz}{dx}=-4\cdot z-5\cdot y+x \rightarrow K_2=-4\cdot(1.5809)-5\cdot(-0.72872)+(0.15) \rightarrow$ $\boxed{K_2=-2.5301}$ olarak hesaplanır. Benzer işlemler yapıldığında;

Zekeriya Girgin

$\boxed{k_3 = f_1(0.15, -0.73544, 1.5889)}$, $\boxed{K_3 = f_2(0.15, -0.73544, 1.5889)}$

$\boxed{k_3 = 1.5889}$, $\boxed{K_3 = -2.5283}$

$\boxed{k_4 = f_1(0.2, -0.6556, 1.4626)}$, $\boxed{K_4 = f_2(0.2, -0.6556, 1.4626)}$

$\boxed{k_4 = 1.4626}$, $\boxed{K_4 = -2.3722}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)\cdot h \rightarrow y(0.2) = y(0.1) + \frac{1}{6}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)\cdot h$$

$$y(0.2) = y(0.1) + \frac{1}{6}\cdot(1.7154 + 2\cdot 1.5809 + 2\cdot 1.5889 + 1.4626)\cdot 0.1 \rightarrow \boxed{y(0.2) = -0.65586}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}\cdot(K_1 + 2\cdot K_2 + 2\cdot K_3 + K_4)\cdot h$$

$$z(0.2) = z(0.1) + \frac{1}{6}\cdot(-2.6891 + 2\cdot(-2.5301) + 2\cdot(-2.5283) - 2.3722)\cdot 0.1$$

$\boxed{z(0.2) = 1.4624}$ olarak hesaplanır. Böylece ikinci tekrarlama tamamlanmış olur.

x values	y(x) values with 4th order RK method	z(x) values with 4th order RK method
+0.00	-1.000000	+2.000000
+0.10	-0.814488	+1.715388
+0.20	-0.655861	+1.462417
+0.30	-0.520947	+1.241038
+0.40	-0.406642	+1.049920
+0.50	-0.310023	+0.886931
+0.60	-0.228404	+0.749486
+0.70	-0.159367	+0.634803
+0.80	-0.100778	+0.540086
+0.90	-0.050775	+0.462639
+1.00	-0.007759	+0.399946

7.4.4 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\cdot\frac{dy}{dx} + y = x + 1$, ve $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklemin $y(0.2)$ deki değerini h=0.1 alarak, 2. mertebeden Ortanokta (Midpoint) RK metodu ile hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

$\boxed{k_1 = \dfrac{dy}{dx} = f\left(x_i, y_i\right)}$ → $\boxed{k_2 = \dfrac{dy}{dx} = f\left(x_i + \dfrac{1}{2}\cdot h, y_i + \dfrac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h\right)}$ → $\boxed{y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h}$

(Analitik çözümü: $y = -2\cdot e^x + 3 + x$, $y(0.2) = 0.7571944836796603322$)

Çözüm: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\cdot\dfrac{dy}{dx} + y = x + 1$ → $z = \dfrac{dy}{dx}$ olsun. Buradan; $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ yazılabilir. Böylece,

$\dfrac{dz}{dx} - 2\cdot z + y = x + 1$ → $\dfrac{dz}{dx} = 2\cdot z - y + x + 1$ olur. Şu anda elimizde iki tane birinci mertebeden diferansiyel denklem bulunmaktadır.

Bunlar; $k_1 = \dfrac{dy}{dx} = f_1\left(x_i, y_i, z_i\right) = z_i$ ve $K_1 = \dfrac{dz}{dx} = f_2\left(x_i, y_i, z_i\right) = 2\cdot z_i - y_i + x_i + 1$ denklemleridir.

$\boxed{k_1 = \dfrac{dy}{dx} = f_1\left(x_i, y_i, z_i\right)}$ → $\boxed{k_1 = f\left(0,1,-1\right)}$ → $k_1 = \dfrac{dy}{dx} = z$ → $k_1 = y_i' = z = -1$ → $\boxed{k_1 = -1}$

$\boxed{K_1 = \dfrac{dz}{dx} = f_2\left(x_i, y_i, z_i\right)}$ $\boxed{K_1 = f_2\left(0,1,-1\right)}$ → $K_1 = \dfrac{dz}{dx} = 2\cdot z - y + x + 1$ → $K_1 = 2\cdot(-1) - 1 + 0 + 1$ → $\boxed{K_1 = -2}$

(k_2) ve (K_2) değerlerinin hesaplanabilmesi için ilk önce (x, y, z) değerlerinin bulunması gereklidir.

$\boxed{k_2 = \dfrac{dy}{dx} = f_1\left(x_i + \dfrac{1}{2}\cdot h, y_i + \dfrac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h, z_i + \dfrac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h\right)}$, $\boxed{K_2 = \dfrac{dz}{dx} = f_2\left(x_i + \dfrac{1}{2}\cdot h, y_i + \dfrac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h, z_i + \dfrac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h\right)}$

$x = x_i + \dfrac{1}{2}\cdot h$ → $x = 0 + \dfrac{1}{2}\cdot 0.1 = 0.05$, $y = y_i + \dfrac{1}{2}\cdot k_1 \cdot h$ → $y = 1 + \dfrac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 0.1 = -0.89$, $z = z_i + \dfrac{1}{2}\cdot K_1 \cdot h$ → $z = -1 + \dfrac{1}{2}\cdot(-2)\cdot 0.1 = -1.21$ → $\boxed{k_2 = f_1\left(0.05, -0.89, -1.21\right)}$ → $\boxed{K_2 = f_2\left(0.05, -0.89, -1.21\right)}$

$k_2 = \dfrac{dy}{dx} = z$ → $\boxed{k_2 = -1.21}$, $K_2 = \dfrac{dz}{dx} = 2\cdot z - y + x + 1$ → $K_2 = 2\cdot(-1.21) - (-0.89) + 0.05 + 1$ → $\boxed{K_2 = -2.1}$

Son işlem olarak aşağıda verilen denklemde yerine yazılmalıdır.

$\boxed{y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h}$, $\boxed{z_{i+1} = z_i + K_2 \cdot h}$

$y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h$ → $y(0.1) = 1 + (1.1)\cdot 0.1$ → $\boxed{y(0.1) = 0.89}$ ve $z_{i+1} = z_i + K_2 \cdot h$ → $z(0.1) = -1 + (-2.1)\cdot 0.1$ → $\boxed{z(0.1) = -1.21}$ olarak değerler hesaplanmış olur. Benzer işlemler $(x = 1.0)$ oluncaya kadar tekrarlandığında aşağıdaki tablo değerleri elde edilir.

x values	y(x) values with 2nd order midpoint RK method	z(x) values with 2nd order midpoint RK method
0.000	1.0000	-1.0000
0.100	0.890000	-1.210000
0.200	0.757950	-1.442050

Zekeriya Girgin

0.300	0.601535	-1.698465
0.400	0.418196	-1.981804
0.500	0.205106	-2.294894
0.600	-0.040857	-2.640857
0.700	-0.323147	-3.023147
0.800	-0.645578	-3.445578
0.900	-1.012364	-3.912364
1.000	-1.428162	-4.428162

7.5 Diferansiyel Quadrature Metodu (Differential Quadrature Method)

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlemesinde kullanılan usullerden bir tanesidir. Avantaj olarak, Sınır değer problemlerine kolaylıkla uygulanabilmesidir. Diğer önemli bir hususiyet Diferansiyel Quadrature Metodunda (DQM) kullanılan katsayılar matrislerinin sabit olup, problemden probleme değişmemesidir. Dezavantajı kullanılan nokta sayısının kısıtlı olmasıdır.

Her türden diferansiyel veya İntegro-Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümüne kolaylıkla uygulanabilmektedir. Hattâ lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılabilmektedir. Aşağıda verilen misâlleri inceleyiniz.

7.5.1 Misal

$f(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-1$ şeklinde verilen fonksiyonun $(x_i=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0)$. noktalarında, sayısal türevini ve integralini hesaplayınız.

Çözüm: sayısal sonuçları aşağıda verilmiştir.

$$\{f(x_i)\}=\begin{Bmatrix} f(x_1)\\ f(x_2)\\ f(x_3)\\ f(x_4)\\ f(x_5)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f(0)\\ f(0.25)\\ f(0.50)\\ f(0.75)\\ f(1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} (3*0^2+2*0-1)\\ (3*025^2+2*0.25-1)\\ (3*0.5^2+2*0.5-1)\\ (3*0.75^2+2*0.75-1)\\ (3*1^2+2*1-1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -1\\ -0.3125\\ 0.75\\ 2.1875\\ 4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -1\\ -\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4}\\ \frac{35}{16}\\ 4\end{Bmatrix} \qquad (116)$$

Verilen noktalardaki integral değerleri;

Zekeriya Girgin

$$\int f(x_i)dx = \int\left(3\cdot x_i^2 + 2\cdot x_i - 1\right)dx = x_i^3 + x_i^2 - x_i = \begin{Bmatrix} \left(0^3+0^2-0\right) \\ \left(0.25^3+0.25^2-0.25\right) \\ \left(0.5^3+0.5^2-0.5\right) \\ \left(0.75^3+0.75^2-0.75\right) \\ \left(1^3+1^2-1\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{11}{64} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{15}{64} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{117}$$

Verilen noktalardaki 1. ve 2. mertebeden sayısal türev değerleri;

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^1}{dx^1}f(x) = \left[A^{(1)}\right]\{f(x)\} \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \left[A^{(2)}\right]\{f(x)\} \end{aligned} \tag{118}$$

$$\{f(x_i)\} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0) \\ f(0.25) \\ f(0.5) \\ f(0.75) \\ f(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{35}{16} \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -0.3125 \\ 0.75 \\ 2.1875 \\ 4 \end{Bmatrix} \tag{119}$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x_i) = 6 * x_i + 2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 5 \\ \frac{13}{2} \\ 8 \end{Bmatrix} \tag{120}$$

DQM formunda yazıldığında,

$$\left[\mathbf{A}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} \tag{121}$$

$$\left[A^{(2)}\right] = \left[A^{(1)}\right]\left[A^{(1)}\right] \tag{122}$$

Zekeriya Girgin

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{140}{3} & -\frac{416}{3} & 152 & -\frac{224}{3} & \frac{44}{3} \\ \frac{44}{3} & -\frac{80}{3} & 8 & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{64}{3} & -40 & \frac{64}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} & 8 & -\frac{80}{3} & \frac{44}{3} \\ \frac{44}{3} & -\frac{224}{3} & 152 & -\frac{416}{3} & \frac{140}{3} \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$\left[A^{(1)}\right]\left\{f\left(x_i\right)\right\} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{35}{16} \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 5 \\ \frac{13}{2} \\ 8 \end{Bmatrix} \quad (124)$$

olduğu görülür. Görüldüğü gibi sadece 5 grid noktası kullanıldığı halde, Denklem (120) ve (124) aynı sonuçları vermektedir. Misalde verilen f(x) fonksiyonunun 2 defa türevi alındığında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\frac{d^2 f\left(x_i\right)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f\left(x_i\right) = 6 = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad (125)$$

Denklem (125) DQM ile aşağıdaki gibi çözülebilir;

$$\left[\mathbf{A}^{(1)}\right]\left[\mathbf{A}^{(1)}\right]\left\{\boldsymbol{f}\left(x_i\right)\right\} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{35}{16} \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad (126)$$

Veya,

$$\left[\mathbf{A}^{(2)}\right]\left\{\boldsymbol{f}\left(x_i\right)\right\}=\begin{bmatrix} \frac{140}{3} & -\frac{416}{3} & 152 & -\frac{224}{3} & \frac{44}{3} \\ \frac{44}{3} & -\frac{80}{3} & 8 & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{64}{3} & -40 & \frac{64}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} & 8 & -\frac{80}{3} & \frac{44}{3} \\ \frac{44}{3} & -\frac{224}{3} & 152 & -\frac{416}{3} & \frac{140}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{35}{16} \\ 4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

(127)

Dikkat edilirse Denklem (125), (126) ve (127) ile elde edilen sonuçlar aynıdır.

7.5.2 Misal

$\frac{dy(x)}{dx}-2\cdot y(x)=1,\ y(0)=0.5$ şeklinde verilen fonksiyonun $x_i=0,0.25,0.5,0.75,1.0$. noktalarında, sayısal türevini ve integralini hesaplayınız.

Çözüm: sayısal sonuçları aşağıda verilmiştir.

DQM formunda yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y(0) \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix}-2\cdot\begin{Bmatrix} y(0) \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5 \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix}-2\cdot\begin{Bmatrix} 0.5 \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Zekeriya Girgin

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} 0.5 \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{25}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} 0.5 \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{31}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ -1 & -\frac{16}{3} & 6 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -2 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -6 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 12 & -16 & \frac{19}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5 \\ y(0.25) \\ y(0.5) \\ y(0.75) \\ y(1.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

7.6 Sonlu Farklar Metodu (Finite Difference Method = FDM)

Sonlu Farklar Metodu (SFM) diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlemesinde kullanılan usûllerden birisidir. Hem sınır değer problemleri, hem de başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılır. SFM nun kullanılabilmesi için, önce birkaç kavramın daha iyi anlaşılması gerekir.

Fark Operatörü (Difference Operator) Δ: Bunun temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Buna aynı zamanda, **İleri Fark Operatörü (Forward Difference Operator)** de denir.

Buradaki h değeri, çok küçük bir değerdir. Diğer bağıntılar aşağıdaki şekilde çıkartılır.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right] = \left[f(x+h+h) - f(x+h)\right] - \left[f(x+h) - f(x)\right]$$

Zekeriya Girgin

$$\Delta^2\left[f(x)\right]=f(x+2\cdot h)-2\cdot f(x+h)+f(x)$$

Buna ikinci mertebeden Fark Operatörü denir.

$$\Delta^3 f(x)=\Delta\left[\Delta^2 f(x)\right]=\left[f(x+2\cdot h+h)-2\cdot f(x+h+h)+f(x+h)\right]-\left[f(x+2\cdot h)-2\cdot f(x+h)+f(x)\right]$$

$$\Delta^3 f(x)=f(x+3\cdot h)-2\cdot f(x+2\cdot h)+f(x+h)-f(x+2\cdot h)+2\cdot f(x+h)-f(x)$$

$$\Delta^3 f(x)=f(x+3\cdot h)-3\cdot f(x+2\cdot h)+3\cdot f(x+h)-f(x)$$

$$\Delta^4 f(x)=\Delta\left[\Delta^3 f(x)\right]=\left[f(x+3\cdot h+h)-3\cdot f(x+2\cdot h+h)+3\cdot f(x+h+h)-f(x+h)\right]$$
$$-\left[f(x+3\cdot h)-3\cdot f(x+2\cdot h)+3\cdot f(x+h)-f(x)\right]$$

$$\Delta^4 f(x)=\Delta\left[\Delta^3 f(x)\right]=\left[f(x+4\cdot h)-3\cdot f(x+3\cdot h)+3\cdot f(x+2\cdot h)-f(x+h)\right]$$
$$-\left[f(x+3\cdot h)-3\cdot f(x+2\cdot h)+3\cdot f(x+h)-f(x)\right]$$

$$\Delta^4 f(x)=f(x+4\cdot h)-2\cdot f(x+3\cdot h)+6\cdot f(x+2\cdot h)-4\cdot f(x+h)+f(x)$$

Veya özetle;

$$\boxed{\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)}$$

$$\boxed{\Delta^2\left[f(x)\right]=f(x+2\cdot h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}$$

$$\boxed{\Delta^3 f(x)=f(x+3\cdot h)-3\cdot f(x+2\cdot h)+3\cdot f(x+h)-f(x)}$$

$$\boxed{\Delta^4 f(x)=f(x+4\cdot h)-2\cdot f(x+3\cdot h)+6\cdot f(x+2\cdot h)-4\cdot f(x+h)+f(x)}$$

yazılabilir.

Diğer Fark Operatörleri (Other Difference Operators):

Fark hesaplamalarında kullanılan başka fark operatörleri mevcuttur. Bunlar aşağıda verilmiştir.

Geri Fark Operatörü (Backward Difference Operator) ∇:

$$\boxed{\nabla f(x)=f(x)-f(x-h)}$$

$$\nabla^2 f(x)=\nabla\left[\nabla f(x)\right]=\left[f(x)-f(x-h)\right]-\left[f(x-h)-f(x-h-h)\right]$$

$$\boxed{\nabla^2 f(x)=f(x)-2\cdot f(x-h)+f(x-2\cdot h)}$$

Merkezi Fark Operatörü (Central Difference Operator) δ:

$$\boxed{\delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}$$

$$\nabla^2 f(x)=\nabla\left[\nabla f(x)\right]=\left[f(x)-f(x-h)\right]-\left[f(x-h)-f(x-h-h)\right]$$

$$\boxed{\nabla^2 f(x)=f(x)-2\cdot f(x-h)+f(x-2\cdot h)}$$

Türev Operatörü (Derivative Operator) D: tanımlaması aşağıdaki şekide verilmiştir.

Zekeriya Girgin

$$Df(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

İkinci mertebeden diferansiyel operatörü ise

$$D^2f(x)=D\left[Df(x)\right]=f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2\cdot h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$D=\frac{d}{dx},\quad D^2=\left(\frac{d}{dx}\right)^2=\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2},\quad D^2f(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

şeklindedir.

Yer Değiştirme veya Kaydırma Operatörü (Translation or Shifting Operator) E:

$$\boxed{Ef(x)=f(x+h)}$$

$$E^2f(x)=E\left[Ef(x)\right]=E\left[f(x+h)\right]=f(x+2\cdot h)$$

Buradan kaydırma operatörü için özetle;

$$\boxed{E^nf(x)=f(x+n\cdot h)}$$

bağıntısı yazılabilir. E ile Δ arasında;

$\Delta=E-1$ veya $E=1+\Delta$ bağıntısı mevcuttur. İspatı:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),\ Ef(x)=f(x+h)$$

$$\Delta f(x)=Ef(x)-f(x)\ \rightarrow\ \frac{\Delta f(x)}{f(x)}=\frac{(E-1)\cdot f(x)}{f(x)}\ \rightarrow\ \boxed{\Delta=E-1}$$ olduğu görülür.

Diferansiyel Operatörü (Differential Operator) d: tanımlaması aşağıdaki şekide verilmiştir.

$$df(x)=f'(x)\cdot\Delta x=f'(x)\cdot h$$

$$D=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta}{h}=\frac{d}{dx}$$

Fark (Δ), Türev (D) ve Diferansiyel (d) operatörleri arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$D=\frac{d}{dx}=\frac{d}{h}$ veya $d=h\cdot D$

İleri Farklar Denklemi (İFD):

$$\boxed{\frac{\Delta f(x)}{\Delta}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta^2}=\frac{f(x+2\cdot h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta^3}=\frac{f(x+3\cdot h)-3\cdot f(x+2\cdot h)+3\cdot f(x+h)-f(x)}{h^3}}$$

Zekeriya Girgin

$$\boxed{\frac{\Delta^4 f(x)}{\Delta^4} = \frac{f(x+4\cdot h) - 2\cdot f(x+3\cdot h) + 6\cdot f(x+2\cdot h) - 4\cdot f(x+h) + f(x)}{h^4}}$$

şeklinde hesaplanır. Başlangıçtan itibaren ileri yönde giderken bu denklemler kullanılır.

Geri Farklar Denklemi (GFD):

$$\boxed{\frac{\nabla f(x)}{\nabla} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\nabla^2 f(x)}{\nabla^2} = \frac{f(x) - 2\cdot f(x-h) + f(x-2\cdot h)}{h^2}}$$

$$\frac{\nabla^3 f(x)}{\nabla^3} = \frac{\nabla\left[\nabla^2 f(x)\right]}{\nabla^3} = \frac{f(x) - 3\cdot f(x-h) + 3\cdot f(x-2\cdot h) - f(x-3\cdot h)}{h^3}$$

$$\boxed{\frac{\nabla^3 f(x)}{\nabla^3} = \frac{f(x) - 3\cdot f(x-h) + 3\cdot f(x-2\cdot h) - f(x-3\cdot h)}{h^3}}$$

$$\frac{\nabla^4 f(x)}{\nabla^4} = \frac{\nabla\left[\nabla^3 f(x)\right]}{\nabla^4} = \frac{f(x) - 4\cdot f(x-h) + 6\cdot f(x-2\cdot h) - 4\cdot f(x-3\cdot h) + f(x-4\cdot h)}{h^4}$$

$$\boxed{\frac{\nabla^4 f(x)}{\nabla^4} = \frac{f(x) - 4\cdot f(x-h) + 6\cdot f(x-2\cdot h) - 4\cdot f(x-3\cdot h) + f(x-4\cdot h)}{h^4}}$$

bağıntıları elde edilir. En son olarak, merkezi farklar için;

Merkezi Farklar Denklemi (MFD):

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

şeklinde hesaplanır. Aşağıdaki misalleri dikkatlice inceyeniniz.

7.6.1 Misal

$\frac{dy(x)}{dx} - 2\cdot y(x) = 1,\ y(0) = 0.5$ şeklinde diferansiyel denklemde, artış olarak h=0.1 değerini kullanıp, $y(0.2)$ için fonksiyonun değerini SFM ile hesaplayınız.

Çözüm: Bu fonksiyonun analitik çözümü, $y(x) = e^{2\cdot x} - \frac{1}{2}$ denklemidir.

$$\boxed{y_1 = 0.5}$$

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h) - y(x)}{h}\quad \frac{dy(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

Veya,

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Yazılabilir. Bu değerler, verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında,

Zekeriya Girgin

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-2\cdot y_i=1$$

olur Denklemin her iki tarafı h ile çarpıldığında,

$-(1+2\cdot h)y_i+y_{i+1}=h \rightarrow \boxed{-(1+2\cdot h)y_1+y_2=h}$ (İleri Farklar Denklemi) elde edilir. Son nokta için;

$$\frac{\nabla f(x)}{\nabla}=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\frac{f_i-f_{i-1}}{h}$$

$$\frac{y_i-y_{i-1}}{h}-2\cdot y_i=1 \rightarrow y_i-y_{i-1}-2\cdot h\cdot y_i=h \rightarrow -y_{i-1}+(1-2\cdot h)\cdot y_i=h$$

$\boxed{-y_2+(1-2\cdot h)\cdot y_3=h}$ (Geri Farklar Formülü) elde edilir. Bu denklem son düğüm için kullanılır.

Yukarıda verilen üç denklem, matris şeklinde yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\cdot h) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & (1-2\cdot h) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.5 \\ h \\ h \end{Bmatrix}$$

halini alır.

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\cdot h) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & (1-2\cdot h) \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0.5 \\ h \\ h \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$ olarak hesaplanır.

Denklemde kullanılan h aralığı daraltıldığı takdirde daha hassas sonuçlar elde edilmektedir. Mesela h=0.0001 için;

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5002 \\ 0.50040008 \end{Bmatrix}$$ sonuçları elde edilmiştir.

Beş nokta için hesaplanması istendiğinde;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+2\cdot h) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+2\cdot h) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+2\cdot h) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (1-2\cdot h) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.5 \\ h \\ h \\ h \\ h \end{Bmatrix}$$

denklemi kullanılır.

7.6.2 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2\cdot y=2\cdot x+3,\ y(0)=0,\ y(0.5)=1.2182818280$ şeklinde diferansiyel denklemde h=0.1 değerini kullanarak fonksiyonun $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$ve $y(0.4)$ noktalarındaki değerini SFM ile hesaplayınız.

Çözüm: Bu fonksiyonun analitik çözümü, $y(x)=e^{2\cdot x}-x-1$ denklemidir. İFD kullanıldığında, verilen diferansiyel denklem için;

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2\cdot y=2\cdot x+3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y(x+2\cdot h)-2\cdot y(x+h)+y(x)}{h^2}$$

Elde edilen değerler diferansiyel denklemde yerine yazıldığında;

$$\frac{y(x+2\cdot h)-2\cdot y(x+h)+y(x)}{h^2}-\frac{y(x+h)-y(x)}{h}-2\cdot y(x)=2\cdot x+3$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı h^2 ile çarğıldığında,

$$y(x+2\cdot h)-2\cdot y(x+h)+y(x)-h\cdot\left[y(x+h)-y(x)\right]-2\cdot h^2\cdot y(x)=2\cdot x+3$$

$$y(x+2\cdot h)-2\cdot y(x+h)+y(x)-h\cdot y(x+h)+h\cdot y(x)-2\cdot h^2\cdot y(x)=2\cdot x+3$$

$$\left[1+h-2\cdot h^2\right]\cdot y(x)-[2+h]\cdot y(x+h)+y(x+2\cdot h)=2\cdot x+3$$

$$\left[1+h-2\cdot h^2\right]\cdot y(x_i)-[2+h]\cdot y(x_{i+1})+y(x_{i+2})=2\cdot x_i+3$$

$$\left(1+h-2\cdot h^2\right)\cdot y(x_i)-(2+h)\cdot y(x_{i+1})+y(x_{i+2})=2\cdot x_i+3$$

eşitliği bulunur. GFD için;

$$\frac{dy(x)}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x)-f(x-\Delta)}{\Delta}=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{y(x)-y(x-h)}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y(x)-2\cdot y(x-h)+y(x-2\cdot h)}{h^2}$$

$$\frac{y(x)-2\cdot y(x-h)+y(x-2\cdot h)}{h^2}-\frac{y(x)-y(x-h)}{h}-2\cdot y(x)=2\cdot x+3$$

$$y(x)-2\cdot y(x-h)+y(x-2\cdot h)-h\cdot\left[y(x)-y(x-h)\right]-2\cdot h^2\cdot y(x)=h^2\cdot[2\cdot x+3]$$

$$y(x)-2\cdot y(x-h)+y(x-2\cdot h)-h\cdot y(x)+h\cdot y(x-h)-2\cdot h^2\cdot y(x)=h^2\cdot[2\cdot x+3]$$

$$\left[1-h-2\cdot h^2\right]\cdot y(x)+[-2+h]\cdot y(x-h)+y(x-2\cdot h)=h^2\cdot[2\cdot x+3]$$

$$\left(1-h-2\cdot h^2\right)\cdot y(x_i)+(-2+h)\cdot y(x_{i-1})+y(x_{i-2})=h^2\cdot(2\cdot x_i+3)$$

$$y(x_{i-2})+(-2+h)\cdot y(x_{i-1})+\left(1-h-2\cdot h^2\right)\cdot y(x_i)=h^2\cdot(2\cdot x_i+3)$$

Zekeriya Girgin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1+h-2\cdot h^2) & -(2+h) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+h-2\cdot h^2) & -(2+h) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+h-2\cdot h^2) & -(2+h) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (-2+h) & (1-h-2\cdot h^2) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ h^2\cdot(2\cdot x_2+3) \\ h^2\cdot(2\cdot x_3+3) \\ h^2\cdot(2\cdot x_4+3) \\ h^2\cdot(2\cdot x_5+3) \\ 1.2182818280 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.129041878 \\ 0.30298794 \\ 0.5309094 \\ 0.82368288 \\ 1.2182818280 \end{Bmatrix}$$

Şeklinde değerler hesaplanır. h=0.001 olduğu takdirde sonuçlar doğruya daha yakın olarak hesaplanmaktadır. Fakat bu durumda, matris boyutu aşırı büyüdüğünden dolayı işlem yapma zorlaşmaktadır.

8. Sayısal İntegrasyon (Numerical Integration)

Sayısal integrasyon bir çok karmaşık ifadelerin integrasyonu almada kullanılmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanı Newton-Cotes formülüdür. Gerçek fonksiyon $f(x)$, polinom olan $f_n(x)$ ile ifade edilir ve yaklaşık olarak bunun integrali alınır.

$$I=\int_a^b f(x)\cdot dx \cong \int_a^b f_n(x)\cdot dx$$

Buradaki $f_n(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$f_n(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\ldots+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_n\cdot x^n$$

n polinomun derecesini bildirmektedir. Fakat en basit integral alma yamuk kuralıdır. hatalı olmasına rağmen en basit şekilde bir kapalı alan altındaki integrali hesaplar.

8.1 Yamuk Kuralı (Trapezoidal Rule)

Bu kural en basit sayısal integral hesaplama metodu sayılabilir.

$$I=\int_a^b f(x)\cdot dx \cong \int_a^b f_1(x)\cdot dx \quad \rightarrow \quad \boxed{I=(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Daha iyi anlaşılması için aşağıdaki misali inceleyiniz.

8.1.1 Misal

$\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot dx$ integralini hem analitik hem de Yamuk kuralı ile n=1,2 ve 4 için hesaplayınız.

Zekeriya Girgin

Çözüm: ilk önce analitik sonuca bakıldığında,

$$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cdot x - \frac{1}{x}\Bigg|_1^2 = \frac{29}{6} = 4.833333333$$

Yamuk kuralında n=1 alındığında,

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 \rightarrow f(1) = 4$$

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(2) = \left(2+\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow f(2) = 6.25$$

$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} \rightarrow I \cong (2-1)\cdot\frac{4+6.25}{2} = 5.125$$

n=2 alındığında iki tane alan hesaplanacaktır. Yani;

$$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx = \int_1^{1.5} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx + \int_{1.5}^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx$$

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 \rightarrow f(1) = 4$$

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(1.5) = \left(1.5+\frac{1}{1.5}\right)^2 \rightarrow f(1.5) = 4.6944444444$$

$$I = \int_1^{1.5} f(x)\cdot dx \cong (1.5-1)\cdot\frac{f(1)+f(1.5)}{2} \rightarrow I \cong (1.5-1)\cdot\frac{4+4.6944444444}{2} = 2.1736111111$$

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(1.5) = \left(1.5+\frac{1}{1.5}\right)^2 \rightarrow f(1.5) = 4.6944444444$$

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow f(2) = \left(2+\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow f(2) = 6.25$$

$$I = \int_{1.5}^2 f(x)\cdot dx \cong (2-1.5)\cdot\frac{f(1.5)+f(2)}{2} = 2.7361111111$$

Toplam alan iki tane alanın toplamıdır. yani

$I = 2.1736111111 + 2.7361111111 = 4.9097$ olarak hesaplanır.

n=100 alındığında alan değeri $I = 4.8333645830$ olarak bulunmaktadır ve bu değerin gerçek değeri daha çok yaklaştığı görülmektedir.

8.2 Simpson Kuralı (Simpson's Rule)

İki farklı Simson kuralı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi Simpson 1/3 kuralı

8.2.1 Simpson 1/3 Kuralı (Simpson's 1/3 Rule)

Zekeriya Girgin

Kural aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)}{6} \rightarrow I=(b-a)\cdot\frac{f(a)+4\cdot f(x_1)+f(b)}{6}$$

Görüldüğü gibi a ile b arasındaki her bir aralık mutlaka 2 ye bölünmelidir. yani $x_1=\frac{a+b}{2}$ dir.

8.2.1.1 Misal

$\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx$ integralini hem analitik hem de Simpson 1/3 kuralı ile n=1 ve n=2 için hesaplayınız.

Çözüm: ilk önce analitik sonuca bakıldığında,

$$\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx=\frac{1}{16}\cdot(4\cdot x-3)^4\Big|_{-3}^{5}=\left[\frac{1}{16}\cdot(4\cdot 5-3)^4\right]-\left[\frac{1}{16}\cdot(4\cdot(-3)-3)^4\right]=2056$$

n=1 için Simpson 1/3 kuralı uygulandığında;

$$\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

n=1 alındığında toplam integral alanı sadece bir tek alan olarak hesaplanacaktır. Bu durumda genişlik değeri, $h=\frac{x_b-x_a}{n}=\frac{5-(-3)}{1}=8$ olduğu görülür. Her bir hesaplamada toplam 3 farklı nokta olduğundan h aralığı her zaman bu metotta 2 ye bölünmelidir.

$$\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$I=(5-(-3))\cdot\frac{f(-3)+4\cdot f(+1)+f(5)}{6}$$

$$I=8\cdot\frac{-3375+4\cdot 1+4913}{6}=2056$$

n=2 alındığında, 2 tane integral alanı hesaplanacak ve daha sonra bu iki alan toplanarak sonuç bulunacaktır. Bu durumda;

$$I=\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx=\int_{-3}^{+1}(4\cdot x-3)^3\cdot dx+\int_{+1}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{-3}^{+1}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=((-3)-(-1))\cdot\frac{f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$I_1=(-2)\cdot\frac{f(-3)+4\cdot f(-1)+f(+1)}{6}$$

$$I_1=(-2)\cdot\frac{-3375+4\cdot(-343)+1}{6}=-3164$$

Zekeriya Girgin

$$I=\int_{-3}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx=\int_{-3}^{+1}(4\cdot x-3)^3\cdot dx+\int_{+1}^{5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I_1+I_2$$

$$I_2=\int_{+1}^{+5}(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=(5-1)\cdot\frac{f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$I_2=(4)\cdot\frac{f(1)+4\cdot f(3)+f(5)}{6}$$

$$I_2=(4)\cdot\frac{1+4\cdot 729+4913}{6}=5220$$

$I=I_1+I_2$ → $I=-3164+5220$ → $\boxed{I=2056}$ olarak hesaplanır.

8.2.2 Simpson 3/8 Kuralı (Simpson's 3/8 Rule)

Kural aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx\cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)}{8}\rightarrow I=(b-a)\cdot\frac{f(a)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(b)}{8}$$

Görüldüğü gibi a ile b arasındaki 4 nokta olduğundan her bir aralık mutlaka 3 e bölünmelidir. Aşağıda verilen misali dikkatlice inceleyiniz.

8.2.2.1 Misal

$\int_0^6(4\cdot x-3)^3\cdot dx$ integralini hem analitik hem de Simpson 3/8 kuralı ile n=1, ve n=2 için hesaplayınız.

Çözüm: ilk önce analitik sonuca bakıldığında,

$$\int_0^6(4\cdot x-3)^3\cdot dx=\frac{1}{16}\cdot(4\cdot x-3)^4\Big|_0^6=\left[\frac{1}{16}\cdot(4\cdot 6-3)^4\right]-\left[\frac{1}{16}\cdot(4\cdot(0)-3)^4\right]=12150$$

n=1 için Simpson 3/8 kuralı uygulandığında;

$$\int_0^6(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

n=1 alındığında toplam integral alanı sadece bir tek alan olarak hesaplanacaktır. Bu durumda genişlik değeri, $h=\frac{x_b-x_a}{n}=\frac{6-0}{1}=6$ olduğu görülür. Her bir hesaplamada toplam 4 nokta olduğundan h aralığı her zaman bu metotta 3 e bölünmelidir.

$$\int_0^6(4\cdot x-3)^3\cdot dx\cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

$$I=(6-0)\cdot\frac{f(0)+3\cdot f(2)+3\cdot f(4)+f(6)}{8}$$

$$I=6\cdot\frac{-27-3\cdot 125+3\cdot 2197+9261}{8}=12150$$

n=2 için Simpson 3/8 kuralı uygulandığında;

Zekeriya Girgin

$$\int_0^6 (4\cdot x-3)^3\cdot dx=\int_0^3 (4\cdot x-3)^3\cdot dx+\int_3^6 (4\cdot x-3)^3\cdot dx \cong I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^3 (4\cdot x-3)^3\cdot dx \cong (3-0)\cdot\frac{f(0)+3\cdot f(1)+3\cdot f(2)+f(3)}{8} \rightarrow I_1=(3-0)\cdot\frac{-27+3\cdot 1+3\cdot 125+729}{8}=405$$

$$I_2=\int_3^6 (4\cdot x-3)^3\cdot dx \cong (6-3)\cdot\frac{f(3)+3\cdot f(4)+3\cdot f(5)+f(6)}{8}$$

$$I_2=(6-3)\cdot\frac{729+3\cdot 2197+3\cdot 4913+9261}{8}=11745$$

$I=I_1+I_2 \rightarrow I=405+11745 \rightarrow \boxed{I=12150}$ olarak hesaplanır.

8.2.2.2 Misal

$\int_0^3 \frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\cdot dx$ ile verilen integralin sayısal çözümünü Simpson 3/8 Kuralı ile ve n=2 alarak hesaplayınız.

1. Çözüm: $\int_0^3 \frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\cdot dx=\int_0^{1.5} \frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\cdot dx+\int_{1.5}^3 \frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\cdot dx$

$$\int_0^{1.5} \frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\cdot dx \cong I=(b-a)\cdot\frac{f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

$$f(x_0)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{0^2\cdot\sin(0)\cdot e^0}{1+0^2}=0$$

$$f(x_1)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=0.5}=\frac{0.5^2\cdot\sin(0.5)\cdot e^{0.5}}{1+0.5^2}=0.1580878167$$

$$f(x_2)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1.0}=\frac{1^2\cdot\sin(1)\cdot e^1}{1+1^2}=1.143677644$$

$$f(x_3)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1.5}=\frac{1.5^2\cdot\sin(1.5)\cdot e^{1.5}}{1+1.5^2}=3.094935493$$

$$I_1=(1.5-0)\cdot\frac{f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)}{8}=(1.5)\cdot\frac{0+3\cdot 0.1580878167+3\cdot 1.143677644+3.094935493}{8}$$

$$\boxed{I_1=1.312543476}$$

$$f(x_0)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1.5}=\frac{1.5^2\cdot\sin(1.5)\cdot e^{1.5}}{1+1.5^2}=3.094935493$$

$$f(x_1)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=2.0}=\frac{2.0^2\cdot\sin(2.0)\cdot e^{2.0}}{1+2.0^2}=5.375079758$$

$$f(x_2)=\left(\frac{x^2\cdot\sin(x)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=2.5}=\frac{2.5^2\cdot\sin(2.5)\cdot e^{2.5}}{1+2.5^2}=6.285244208$$

Zekeriya Girgin

$$f\left(x_3\right)=\left(\frac{x^2\cdot\sin\left(x\right)\cdot e^x}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=3.0}=\frac{3.0^2\cdot\sin\left(3.0\right)\cdot e^{3.0}}{1+3.0^2}=2.551024020$$

$$I_2=\left(3.0-1.5\right)\cdot\frac{f\left(x_0\right)+3\cdot f\left(x_1\right)+3\cdot f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)}{8}$$

$$I_2=\left(1.5\right)\cdot\frac{3.094935493+3\cdot 5.375079758+3\cdot 6.285244208+2.551024020}{8}$$

$\boxed{I_2=7.617549638}$ → $I=I_1+I_2=1.312543476+7.617549638$ → $\boxed{I=8.930093114}$

Gerçek değeri; $\boxed{I_{exact}=8.977863715}$ şeklindedir. n=100 alındığında gerçek değere daha çok yaklaşmakta ve $\boxed{I=8.977863708}$ olarak hesaplanmaktadır.

Zekeriya Girgin